

Umfassende klassische Analyse des geeichten $SL(2, \mathbb{R})/U(1)$ -Wess-Zumino- Novikov-Witten-Modells

D i s s e r t a t i o n

zur Erlangung des akademischen Grades

doctor rerum naturalium
(dr. rer. nat.)

im Fach Physik

eingereicht an der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät I
der Humboldt-Universität zu Berlin

von

Dipl.-Phys. Uwe Müller

geboren am 2. Mai 1967 in Brandenburg (Havel)

Präsident der Humboldt-Universität zu Berlin
Prof. Dr. Dr. h. c. H. Meyer

Dekan der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät I
Prof. Dr. J. P. Rabe

Gutachter: 1. Prof. Dr. Dieter Lüst
2. Prof. Dr. Hermann Nikolai
3. Dr. Gerhard Weigt

Eingereicht am: 16. Juni 1998
Tag der mündlichen Prüfung: 30. Oktober 1998

Die vorliegende Version der Dissertation weist gegenüber der eingereichten Arbeit geringfügige stilistische Änderungen auf, um den Standardisierungsanforderungen der digitalen Archivierung gerecht zu werden. So wurden die englisch- und die deutschsprachige Zusammenfassung, das Abbildungsverzeichnis, das Tabellenverzeichnis, die Selbständigkeitserklärung und der tabellarische Lebenslauf hinzugefügt. Weiterhin ist das Literaturverzeichnis umgestellt worden. Bei dieser Gelegenheit wurden auch einige Druckfehler und orthografische Mängel behoben. Der Inhalt der Dissertation blieb von diesen Änderungen unberührt.

Abstract

In recent years, Black Holes have attracted much attention, in particular, because of their unusual quantum-theoretical properties. An interesting model, in this context, is the $SL(2, \mathbb{R})/U(1)$ gauged Wess-Zumino-Novikov-Witten model, which can be interpreted stringtheoretically as Euclidean two-dimensional Black Hole. The present dissertation analyzes the classical properties of this model, in order to prepare the basis for quantum-theoretical investigations.

First, gauged Wess-Zumino-Novikov-Witten (WZNW) models are introduced in general. Usually, they are formulated including gauge fields, whose equations of motion are purely algebraic. In the present dissertation, the gauge fields are eliminated from the models. A class of non-linear integrable field theories arises, whose equations of motion can be represented by Lax pairs explicitly.

These results are specialized to the $SL(2, \mathbb{R})/U(1)$ gauged WZNW model. For comparison, the elimination of the gauge field by explicit path integration is also investigated. But due to mathematical ambiguities, this investigation does not lead to a final result.

The classical $SL(2, \mathbb{R})/U(1)$ gauged WZNW model is investigated in an infinitely extended Minkowski space-time as well as with spatially periodic boundary conditions. The latter is important for the stringtheoretical interpretation of the model. The non-linear equations of motion and their general solution are given. A procedure is derived to determine the parameter functions of the general solution from given initial conditions of the equations of motion. By means of this procedure the Poisson brackets of the parameter functions are calculated from the canonical Poisson brackets of the physical fields. It is shown that there is a non-local canonical transformation of the non-linear physical fields onto free fields. The corresponding Bäcklund transformation is presented.

Keywords:

Integrability, Conformal Field Theory, Gauged Wess-Zumino-Novikov-Witten Model, Black Hole

Zusammenfassung

In den letzten Jahren haben Schwarze Löcher viel Aufmerksamkeit auf sich gezogen, insbesondere wegen ihrer ungewöhnlichen quantentheoretischen Eigenschaften. Ein in diesem Zusammenhang interessantes Modell ist das geeichte $SL(2, \mathbb{R})/U(1)$ -Wess-Zumino-Novikov-Witten-Modell, das im Rahmen der Stringtheorie als Euklidisches zweidimensionales Schwarzes Loch interpretiert werden kann. Die vorliegende Arbeit analysiert die klassischen Eigenschaften dieses Modells, um so die Grundlage für quantentheoretische Untersuchungen zu schaffen.

Ausgangspunkt ist eine allgemeine Betrachtung über geeichte Wess-Zumino-Novikov-Witten-Modelle (WZNW-Modelle). Herkömmlicherweise werden sie mit Hilfe von Eichfeldern formuliert, deren Bewegungsgleichungen rein algebraisch sind. In der vorliegenden Arbeit werden die Eichfelder aus den Modellen eliminiert. Dabei entsteht eine Klasse von nichtlinearen integrablen konformen Feldtheorien, für deren Bewegungsgleichung eine explizite Lax-Paar-Darstellung abgeleitet wird.

Diese Ergebnisse werden auf das geeichte $SL(2, \mathbb{R})/U(1)$ -WZNW-Modell spezialisiert. Zum Vergleich wird auch die Eliminierung des Eichfeldes durch explizite Pfadintegration untersucht, die jedoch aufgrund mathematischer Ambiguitäten nicht zu einem abschließenden Ergebnis geführt wird.

Das klassische geeichte $SL(2, \mathbb{R})/U(1)$ -WZNW-Modell wird sowohl in einem unendlich ausgedehnten Minkowski-Raum als auch mit räumlich periodischen Randbedingungen untersucht. Letzteres ist für die stringtheoretische Interpretation des Modells wichtig. Es werden die nichtlinearen Bewegungsgleichungen und ihre allgemeine Lösung angegeben. Diese enthält Parameterfunktionen. Es wird ein Verfahren abgeleitet, um die Parameterfunktionen aus vorgegebenen Anfangsbedingungen zu bestimmen. Mit Hilfe dieses Verfahrens werden die Poissonklammern der Parameterfunktionen aus den kanonischen Poissonklammern der physikalischen Felder berechnet. Es wird gezeigt, daß es eine nichtlokale kanonische Transformation der nichtlinearen physikalischen Felder auf freie Felder gibt. Die entsprechende Bäcklund-Transformation wird angegeben.

Schlagwörter:

Integrabilität, Konforme Feldtheorie, Geeichtes Wess-Zumino-Novikov-Witten-Modell, Schwarzes Loch

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	iv
Tabellenverzeichnis	v
1 Einführung	1
1.1 Allgemeine Motivation der Arbeit	1
1.2 Konforme Feldtheorie, Strings und Schwarze Löcher	5
2 Wess-Zumino-Novikov-Witten-Modelle	10
2.1 Die ungeeichten Wess-Zumino-Novikov-Witten-Modelle	10
2.2 Die geeichten Wess-Zumino-Novikov-Witten-Modelle	12
2.3 Die Integrabilität der geeichten Wess-Zumino-Novikov-Witten-Modelle	15
2.4 Das geeichte $SL(2, \mathbb{R})/U(1)$ -Wess-Zumino-Novikov-Witten-Modell nach Eliminierung des Eichfeldes durch seine Bewegungsgleichungen	19
2.5 Bemerkungen zur Eliminierung des Eichfeldes mittels Pfadintegration	23
2.6 Die Interpretation des $SL(2, \mathbb{R})/U(1)$ -Wess-Zumino-Novikov-Witten-Modells	28
3 Die klassische Analyse des geeichten $SL(2, \mathbb{R})/U(1)$-Wess-Zumino-Novikov-Witten-Modells — der feldtheoretische Fall	31
3.1 Bewegungsgleichungen und Erhaltungsgrößen	32
3.2 Einbettung des geeichten $SL(2, \mathbb{R})/U(1)$ -Wess-Zumino-Novikov-Witten-Modells in eine nichtabelsche Toda-Theorie	34
3.3 Allgemeine Lösung der Bewegungsgleichungen	35
3.4 Die kanonischen Poissonklammern	37

3.5	Die Fixierung der allgemeinen Lösung durch Anfangswerte . . .	40
3.6	Die Poissonklammern der (anti-) chiralen Felder	43
3.7	Transformation der physikalischen Felder auf freie Felder . . .	46
3.8	Bäcklund-Transformation des geeichten $SL(2, \mathbb{R})/U(1)$ -WZNW-Modells auf freie Felder	52
4	Die klassische Analyse des periodischen geeichten $SL(2, \mathbb{R})/U(1)$-Wess-Zumino-Novikov-Witten-Modells	54
4.1	Generelle Unterschiede zum feldtheoretischen Fall	54
4.2	Die Bewegungsgleichungen und die Erhaltungsgrößen des periodischen Modells	56
4.3	Die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichungen im periodischen Fall	57
4.4	Die kanonischen Poissonklammern im periodischen Fall	59
4.5	Die Fixierung der allgemeinen Lösung durch Anfangswerte im periodischen Fall	60
4.6	Die Poissonklammern der (anti-) chiralen Felder im periodischen Fall	67
4.7	Die kanonische Transformation auf periodische freie Felder . .	71
5	Zusammenfassung und Ausblick	75
A	Metrikkonventionen	77
A.1	Raum-zeitliche Koordinaten	78
A.2	Lichtkegelkoordinaten	78
B	Konforme Transformationen	79
C	Die Eichung des Wess-Zumino-Terms	81
D	Eine Relation zwischen Determinanten	83
E	Näherungsweise Pfadintegralberechnung des geeichten Wess-Zumino-Novikov-Witten-Modells	88
E.1	Ausintegration des Eichfeldes	88
E.2	Vergleich mit Ergebnissen aus der Literatur	92
F	Das Rechnen mit Poissonklammern	96

G Herleitung der Frei-Feld-Darstellungen aus dem Energie-Impuls-Tensor	98
H Einschränkungen der Parameter der Frei-Feld-Darstellungen	105
I Poissonklammern im periodischen Fall	108
J Symmetrische Poissonklammern	114
Danksagung	120
Selbständigkeitserklärung	121
Tabellarischer Lebenslauf	122
Veröffentlichungen	123

Abbildungsverzeichnis

- 2.1 a) Die kausale Struktur Schwarzer Löcher. Das Gebiet I ist das Äußere, das Gebiet II das Innere des Schwarzen Loches. Jedes physikalische Objekt im Gebiet II trifft unweigerlich auf die Singularität. b) Funktionen, die charakteristisch für das Verhalten eines zweidimensionalen (untere Kurve) bzw. vierdimensionalen (obere Kurve) Schwarzen Loches sind. 30

Tabellenverzeichnis

I.1	Die in der Kurzdarstellung der Poissonklammern auftretenden nichtmultiplikativen Operatoren	110
-----	--	-----

Kapitel 1

Einführung

1.1 Allgemeine Motivation der Arbeit

Sowohl die Quantenfeldtheorie [1, 2] als auch die Allgemeine Relativitätstheorie [3] finden glänzende experimentelle Bestätigungen bei ihren Anwendungen in der mikroskopischen bzw. makroskopischen Physik. Trotzdem ist es bislang nicht gelungen, beide Theorien in einer konsistenten Quantenfeldtheorie der Gravitation zu vereinigen. Für praktische Zwecke ist das bisher unerheblich, da einerseits wegen der Schwäche der Gravitation ihre Effekte in der mikroskopischen Physik erst bei sehr hohen, heutzutage nicht erreichbaren Energien zu erwarten sind und andererseits Quanteneffekte in der Gravitationsphysik nur bei sehr starken, experimentell nicht unmittelbar zugänglichen Gravitationsfeldern auftreten. Dennoch ist die einheitliche Beschreibung aller in der Natur bekannten Wechselwirkungen wünschenswert. Sie ist beispielsweise erforderlich zur Diskussion der Evolution des Kosmos sehr kurze Zeit nach dem Urknall oder zum genauen Verständnis der Prozesse beim teilweisen oder vollständigen Zerfall eines Schwarzen Loches infolge von Hawking-Strahlung [4, 5]. Der letztgenannte Vorgang stellt die Physik heute immer noch vor Rätsel. So hat diese Strahlung zumindest in semiklassischer Näherung thermischen Charakter, sie wird also durch einen gemischten Quantenzustand beschrieben. Falls sich das Schwarze Loch aus einem reinen Quantenzustand entwickelt hat, erhebt sich die Frage, ob über den Hawking-Effekt ein reiner Quantenzustand in einen gemischten übergehen kann oder ob der thermische Charakter der Hawking-Strahlung nur durch die bei ihrer Herleitung benutzte Näherung zustande kommt. Ein weiteres Rätsel betrifft

erhaltene Ladungsquantenzahlen wie die Baryonenzahl. Nehmen wir etwa an, daß ein Stern zu einem Schwarzen Loch kollabiert und dieses keine weitere Materie mehr aufnimmt, sondern wegen des Hawking-Effektes kontinuierlich Energie abstrahlt. Irgendwann wird das Schwarze Loch einen Großteil seiner Masse emittiert haben, und zwar wegen des thermischen Charakters der Strahlung überwiegend in Form von masselosen und leichten Elementarteilchen, also Photonen, Gravitonen und Leptonen. Den größten Teil der Masse des Sterns machten aber seine Baryonen aus, die sich so in andere Teilchen umgewandelt haben müssen. Führt Quantengravitation also zur Verletzung der Baryonenzahl?

Um solche Fragen zufriedenstellend beantworten zu können, ist eine Quantentheorie der Gravitation erforderlich. Bisher wurde der Hawking-Effekt nur in semiklassischer Näherung bei vorgegebener klassischer Metrik berechnet, wobei die Rückwirkung der Strahlung auf die Metrik vernachlässigt wird. Auf diese Weise ist keine Aussage über die Entwicklung eines Schwarzen Loches möglich.

Der direkte Versuch, die Einsteinsche Allgemeine Relativitätstheorie mit störungstheoretischen Konzepten zu quantisieren, scheiterte bisher an ihrer Nichtrenormierbarkeit [6].

Die bei einer nichtrenormierbaren Theorie vorhandenen Ultraviolettdivergenzen hängen mit dem singulären kurzreichweitigen Verhalten der Quantenfelder zusammen. Deshalb könnte man z.B. erwarten, daß diese Divergenzen beim Übergang von punktförmigen zu ausgedehnten Quanten sich abschwächen oder gar verschwinden. Eine einfache Verallgemeinerung punktförmiger Teilchen sind eindimensionale Objekte, die Strings, die zu harmonischen Schwingungen angeregt werden können [7]. Streuamplituden in der Stringtheorie haben in der Tat ein weiches Ultraviolettverhalten als solche punktförmiger Teilchen [7, 8, 9].

Es gibt ernstzunehmende Versuche, die Gravitation als effektive Wechselwirkung renormierbarer Stringtheorien aufzufassen, da letztere im Nieder-Energie-Limes die Einsteinschen Gleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie liefern [10, 11, 12, 13]. Wenngleich dieser Zugang sehr spekulativ und durch direkte Experimente in absehbarer Zeit nicht überprüfbar ist, so besteht doch Interesse an den Aussagen einer solchen Theorie zu Fragen der Quantengravitation.

Eine fundamentale Eigenschaft von Stringmodellen ist die konforme Invarianz. Beispielsweise kann jede zweidimensionale konforme Quantenfeldtheorie als Lösung der Stringtheorie für eine bestimmte physikalische Situati-

on angesehen werden. So beschreibt das periodische geeichte $SL(2, \mathbb{R})/U(1)$ -Wess-Zumino-Novikov-Witten-Modell (WZNW-Modell) [14] die Bewegung eines bosonischen geschlossenen Strings im Hintergrundfeld eines zweidimensionalen Schwarzen Loches [15]. Die konform invariante Quantisierung dieses Modells liefert dann Aussagen über das Verhalten der verschiedenen String-zustände in der Metrik des Schwarzen Lochs.

Um eine nichtstörungstheoretische geometrische Interpretation der Quantentheorie des geeichten $SL(2, \mathbb{R})/U(1)$ -WZNW-Modells zu erhalten, sind in der rein algebraischen Formulierung als Coset-Modell [16] und in der Lagrangeschen Formulierung mit Hilfsfeldern [17, 18, 19, 20, 21] Zusatzannahmen nötig [22, 23, 24, 25, 26]. Um diese Annahmen zu überprüfen und ein besseres Verständnis der Geometrie konformer Feldtheorien zu bekommen, ist eine Lagrangesche Formulierung des Modells ohne Hilfsfelder wünschenswert.

In der vorliegenden Arbeit wird das klassische geeichte $SL(2, \mathbb{R})/U(1)$ -WZNW-Modell nach Eliminierung aller Hilfsfelder untersucht. Interessanterweise handelt es sich dabei, wie bei allen geeichten Wess-Zumino-Novikov-Witten-Modellen, um eine integrable konforme Feldtheorie, deren exakte Lösung Grundlage für eine kanonische Quantisierung sein kann [27]. Hier wird die vollständige klassische Lösung des geeichten $SL(2, \mathbb{R})/U(1)$ -WZNW-Modells vorgestellt. Die darauf aufbauende Quantisierung dieser konformen Feldtheorie verbleibt als Herausforderung.

Diese Arbeit ist wie folgt gegliedert. Im nächsten Abschnitt dieses Kapitels wird das nähere physikalische Umfeld genauer betrachtet, indem das Zusammenspiel von konformer Feldtheorie, Strings und Schwarzen Löchern verdeutlicht wird.

In Kapitel 2 wird zuerst Bekanntes über ungeeichte und geeichte Wess-Zumino-Novikov-Witten-Modelle zusammengetragen. Für eine geometrische Interpretation der geeichten Modelle muß deren nichtdynamisches Eichfeld eliminiert werden. Ein Schwerpunkt wird dabei auf die Eliminierung des Eichfeldes in der klassischen Wirkung gelegt. Das führt zu interessanten klassischen Formulierungen der geeichten Wess-Zumino-Novikov-Witten-Modelle, die so in der Literatur nicht zu finden sind. Es wird in allgemeiner Form ein Lax-Paar für diese Modelle hergeleitet, um ihre Integrabilität zu zeigen. Dann werden diese Resultate auf das $SL(2, \mathbb{R})/U(1)$ -WZNW-Modell spezialisiert. Weiterhin wird die Eliminierung des Eichfeldes mittels expliziter Pfadintegration untersucht, um einen Vergleich mit den Resultaten aus der Literatur [23, 24, 25, 26], in der diese Pfadintegration mit Hilfe von Symmetrieargumenten durchgeführt wurde, zu unternehmen. Die bei der direkten Pfadinte-

gration auftretenden Schwierigkeiten motivieren die Verwendung der in dieser Arbeit untersuchten klassischen Wirkung. Schließlich wird gezeigt, daß das geeichte $SL(2, \mathbb{R})/U(1)$ -WZNW-Modell die Raum-Zeit-Geometrie eines zweidimensionalen Schwarzen Loches besitzt [15].

Das Kapitel 3 widmet sich dem geeichten $SL(2, \mathbb{R})/U(1)$ -WZNW-Modell als Feldtheorie in einem unendlich ausgedehnten Minkowski-Raum. Es werden die Bewegungsgleichungen und Erhaltungsgrößen des Modells [28, 29, 30] angegeben. Dann wird eine nichtabelsche Toda-Theorie erwähnt, die eine integrable Erweiterung des geeichten $SL(2, \mathbb{R})/U(1)$ -WZNW-Modells ist und deshalb in der Literatur studiert wurde [31, 32]. Als Resultat der vorliegenden Arbeit wird für das geeichte $SL(2, \mathbb{R})/U(1)$ -WZNW-Modell selbst die allgemeine Lösung angegeben [27]. Durch die Vorgabe von Anfangswerten für die physikalischen Felder des Modells werden die Parameterfunktionen der allgemeinen Lösung bestimmt und ihre Poissonklammern aus den Poissonklammern der physikalischen Felder berechnet. Es wird gezeigt, daß es eine kanonische Transformation der physikalischen Felder auf freie Felder gibt. Am Schluß des dritten Kapitels wird diese kanonische Transformation in einer Bäcklund-Transformation zusammengefaßt.

Für das Kapitel 4 wird im Gegensatz zum dritten Kapitel der räumliche Teil des Minkowski-Raumes als endlich und periodisch vorausgesetzt, um die Grundlagen für eine spätere Stringinterpretation des Modells zu legen. Dabei werden im wesentlichen nur die Unterschiede zum feldtheoretischen Fall explizit diskutiert. Diese sind hauptsächlich in den hier auftretenden Nullmoden und den geänderten Randbedingungen der Felder begründet. Der Aufbau des vierten Kapitels orientiert sich an dem des dritten Kapitels.

Im fünften Kapitel werden die Ergebnisse dieser Arbeit zusammengefaßt, und es wird ein Ausblick auf mögliche zukünftige Entwicklungen gegeben.

In den Anhängen sind technische Details dargestellt. Im Anhang A sind die Metrikkonventionen zu finden. Im Anhang B sind einige Gleichungen zu konformen Transformationen zusammengestellt. Im Anhang C wird die Eichung des Wess-Zumino-Terms untersucht. Im Anhang D wird eine Relation zwischen den Determinanten zweier Differentialoperatoren, die sich nur um einen ortsabhängigen Faktor unterscheiden, hergeleitet. Der Anhang E versteht sich als technische Ergänzung zum Abschnitt 2.5, in dem die Eliminierung des Eichfeldes im geeichten $SL(2, \mathbb{R})/U(1)$ -WZNW-Modell mittels Pfadintegration untersucht wird. Im Anhang G werden aus dem Energie-Impuls-Tensor in Termen der (anti-) chiralen Parameterfunktionen der allgemeinen Lösung und einem plausiblen Ansatz mögliche Frei-Feld-Darstellungen herge-

leitet. Diese Schar von Darstellungen wird durch einige Parameter beschrieben. Die Wahl dieser Parameter wird durch Zusatzbedingungen, die unter anderem aus den Randbedingungen für die physikalischen Felder folgen, im Anhang H eingeschränkt. Der Anhang I stellt Poissonklammern des periodischen geeichten $SL(2, \mathbb{R})/U(1)$ -WZNW-Modells zusammen. Diese Poissonklammern zeigen eine gewisse Asymmetrie unter Vertauschungen der (anti-)chiralen Funktionen, lassen aber eine einfache Frei-Feld-Darstellung zu. Im Anhang J wird gezeigt, daß diese Asymmetrie um den Preis einer komplizierteren Frei-Feld-Darstellung der entsprechenden Poissonklammern vermieden werden kann.

1.2 Konforme Feldtheorie, Strings und Schwarze Löcher

Die Bewegung eines Strings in einem gekrümmten Raum (Targetraum) mit der Metrik G_{mn} wird durch die Wirkung

$$S[x, \gamma] = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int \gamma^{\mu\nu} G_{mn}(x) \partial_\mu x^m \partial_\nu x^n \sqrt{-\det \gamma} d^2\xi \quad (1.1)$$

beschrieben [7]. α' ist eine zur Stringspannung umgekehrt proportionale Konstante. Diese Wirkung besitzt neben der Invarianz gegenüber Koordinatentransformationen

$$\xi \rightarrow \xi' = \xi'(\xi), \quad \gamma^{\mu\nu}(\xi) \rightarrow \gamma'^{\mu\nu}(\xi') = \frac{\partial \xi'^\mu}{\partial \xi^\kappa} \frac{\partial \xi'^\nu}{\partial \xi^\lambda} \gamma^{\kappa\lambda}(\xi(\xi')) \quad (1.2)$$

auch die Invarianz unter den konformen Transformationen

$$\gamma_{\mu\nu}(\xi) \rightarrow \lambda(\xi) \gamma_{\mu\nu}(\xi). \quad (1.3)$$

Die Quantentheorie des Strings kann mittels funktionaler Integration durch das Zustandsintegral

$$Z = \int \mathcal{D}\gamma \mathcal{D}x e^{iS[x, \gamma]} \quad (1.4)$$

definiert werden. Das Funktionalintegral über $\mathcal{D}\gamma$ ist dabei auch über verschiedene Topologien, die in zwei Dimensionen durch das Geschlecht der

Fläche bestimmt werden, zu erstrecken. Korrelationsfunktionen zwischen verschiedenen Stringzuständen lassen sich durch Einsetzen von Vertexoperatoren in das Zustandsintegral (1.4) gewinnen. Das Zustandsintegral kann jedoch auch im Sinne einer zweidimensionalen Quantenfeldtheorie für die Felder x und γ betrachtet werden. Hier tritt die Targetraummetrik $G_{mn}(x)$ als Kopplung der Felder $x^m(\xi)$ auf. Um Renormierbarkeit und konforme Invarianz dieser zweidimensionalen Theorie zu gewährleisten, ist es im allgemeinen erforderlich, weitere Terme in die Wirkung aufzunehmen. Insbesondere wird bei dimensionaler Regularisierung die Weylinvarianz (1.3) gebrochen, so daß auch nichtweylinvariante Größen wie der Krümmungsskalar $R^{(2)}(\xi)$ der Weltfläche berücksichtigt werden müssen. Die allgemeinste renormierbare Wirkung in zwei Dimensionen ist die der verallgemeinerten Sigma-Modelle

$$S[x, \gamma] = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\xi \left\{ \left[\sqrt{-\det \gamma} \gamma^{\mu\nu} G_{mn}(x) + \epsilon^{\mu\nu} B_{mn}(x) \right] \partial_\mu x^m \partial_\nu x^n - \frac{1}{2} \sqrt{-\det \gamma} \left[\alpha' R^{(2)} \Phi(x) + T(x) \right] \right\}. \quad (1.5)$$

Gegenüber (1.1) neue Targetraum-Felder sind hier die antisymmetrische Kopplung $B_{mn}(x)$, Torsionspotential oder Axion genannt, das Dilaton $\Phi(x)$ und das Tachyonpotential $T(x)$. Zu jeder dieser Kopplungen gibt es einen masselosen oder tachyonischen Stringzustand, so daß diese Kopplungen in einer Stringfeldtheorie als quantentheoretische Erwartungswerte der den Stringzuständen zuzuordnenden Felder interpretiert werden können. Jeder Wahl der Funktionen G , B , Φ und T entspricht somit eine klassische Hintergrundfeldkonfiguration. Die Forderung nach Erhalt der Symmetrien (1.2) und (1.3) auch bei Quantisierung führt zu Bedingungen an die Kopplungen G , B , Φ und T . Der Dilaton-Term $R^{(2)}\Phi$ der Wirkung (1.5) ist klassisch selbst nicht konform invariant, er ermöglicht aber die Aufhebung einer konformen Anomalie nach der Quantisierung, so daß die Quantentheorie konform invariant ist. Der nichtstörungstheoretische Charakter des Dilatons bedarf aber noch weiterer Klärung [15, 22, 23, 24, 25, 26].

Die Bedingungsgleichungen, die die konforme Invarianz der zu (1.5) gehörenden Quantentheorie sichern, lassen sich störungstheoretisch berechnen, indem für die Kopplungen G , B , Φ und T die Renormierungsgruppenfunktionen β^G , β^B , β^Φ und β^T Ordnung für Ordnung in α' bestimmt werden. Ihr Verschwinden sichert die globale Skaleninvarianz der Theorie [10, 11, 12], und eine detaillierte Analyse leitet aus ihnen Bedingungen für die Weyl-Invarianz

(= lokale Skaleninvarianz) ab [13]. Das ergibt in jeder Ordnung der Störungstheorie Bewegungsgleichungen für die beteiligten Felder G , B , Φ und T . Sie lauten in der Ordnung α' (für $T \equiv 0$) [10, 11, 12]

$$\begin{aligned}\beta_{mn}^G &= R_{mn} - \frac{1}{4} H_m{}^{kl} H_{nkl} - \nabla_m \nabla_n \Phi + O(\alpha') = 0 \\ \beta_B &= \nabla_k H^k{}_{mn} + \nabla_k \Phi H^k{}_{mn} + O(\alpha') = 0 \\ \frac{\beta_\Phi}{\alpha'} &= \frac{1}{\alpha'} \frac{D-26}{48\pi^2} + \frac{1}{16\pi^2} \left\{ (\nabla\Phi)^2 + 2\nabla^2\Phi - R + \frac{1}{12} H^2 \right\} + O(\alpha') = 0\end{aligned}\quad (1.6)$$

Hierbei sind $H_{mnk} = \nabla_m B_{nk} + \nabla_n B_{km} + \nabla_k B_{mn}$ die Feldstärke des Torsionspotentials B_{mn} und R_{mn} der Ricci-Tensor zur Metrik G_{mn} . Nach konformer Reskalierung der Metrik G sind diese Gleichungen äquivalent zu den Bewegungsgleichungen eines gekoppelten Systems von Gravitation und Materie [12].

Von nichtrotierenden Schwarzen Löchern ohne elektrische Ladung sprechen wir, wenn z.B. in vier Raum-Zeit-Dimensionen die Metrik G_{mn} durch die 1916 von Schwarzschild gefundene sogenannte Schwarzschild-Metrik

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - 2M/r} + r^2 d\Omega^2(\theta, \phi) - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 \quad (1.7)$$

gegeben wird. Hier ist r die radiale Koordinate, die durch die Forderung definiert ist, daß die Fläche $r = \text{const}$ den Flächeninhalt $A = 4\pi r^2$ hat. t ist die Zeit, die ein unendlich entfernter Beobachter mißt und

$$d\Omega^2(\theta, \phi) = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2 \quad (1.8)$$

das Raumwinkelement, das durch die Winkelkoordinaten θ und ϕ gegeben ist. M ist ein zur Masse des Schwarzen Loches proportionaler Parameter.

Die Metrik (1.7) ist singulär bei $r = 2M$ und $r = 0$. Die Singularität bei $r = 2M$ ist aber eine Koordinatensingularität, erkennbar an dem nichtsingulären Verhalten der Komponenten des Krümmungstensors

$$R^{r\theta}{}_{r\theta} = R^{r\phi}{}_{r\phi} = R^{\theta t}{}_{\theta t} = R^{\phi t}{}_{\phi t} = -\frac{M}{r^3}, \quad R^{rt}{}_{rt} = R^{\theta\phi}{}_{\theta\phi} = \frac{2M}{r^3}, \quad (1.9)$$

aus denen sich die Invarianten

$$R^{m_1 n_1}{}_{m_2 n_2} R^{m_2 n_2}{}_{m_3 n_3} \dots R^{m_n n_n}{}_{m_1 n_1} = (2^{2n+1} + (-2)^{n+2}) \frac{M^n}{r^{3n}} \quad (1.10)$$

berechnen. Tatsächlich läßt sie sich durch Einführung von Kruskalkoordinaten [33] beseitigen, die durch

$$u = -\exp\left(-\frac{t-r^*}{4M}\right), \quad v = \exp\left(\frac{t+r^*}{4M}\right), \quad (1.11)$$

mit $r^* \equiv r + 2M \ln[(r/2M) - 1]$ definiert sind. Das resultierende Linienelement hat dann die Form

$$ds^2 = -\frac{32M^3}{r} \exp\left(-\frac{r}{2M}\right) dudv + r^2 d\Omega^2(\theta, \phi). \quad (1.12)$$

Ein frei fallender Beobachter wird also bei $r = 2M$ nichts Außergewöhnliches feststellen. Dennoch hat dieser Ort eine physikalische Bedeutung. Für $r < 2M$ ist r zeitartig und t raumartig. Das bedeutet, daß es hier möglich ist, sich in der Zeit vor- und rückwärts zu bewegen, aber unmöglich, den Fall ins Zentrum des Schwarzen Loches aufzuhalten. Weil also nichts aus dem Gebiet $r < 2M$ nach außen ($r > 2M$) dringen kann, wird der Ort $r = 2M$ Ereignishorizont genannt. Die Singularität bei $r = 0$ ist hingegen eine physikalische Singularität, für die die Invarianten des Krümmungstensors (1.10) divergieren.

Ein klassisches Objekt, das einmal hinter dem Ereignishorizont ist, kann nicht wieder in das Äußere des Schwarzen Loches kommen. Ebenso gelangt auch kein Licht nach außen, das Schwarze Loch ist tatsächlich „schwarz“.

Dieses Bild ändert sich, wenn Quantenfelder im Hintergrund des Schwarzen Loches betrachtet werden [4]. Die Anwesenheit des Schwarzen Loches bewirkt, daß das Vakuum der einlaufenden Teilchen nicht mit dem Vakuum der auslaufenden Teilchen übereinstimmt [5]. Die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren der verschiedenen Vakua transformieren sich gemäß Bogoliubov-Transformationen, so daß einige Vernichtungsoperatoren des Eingangsvakuums das Ausgangsvakuum nicht annihilieren. Durch das Schwarze Loch sind also Teilchen entstanden. Das Schwarze Loch ist deshalb nicht völlig schwarz, es emittiert Teilchen, deren Energiespektrum das eines Hohlraumstrahlers mit der Temperatur (k_B ist die Boltzmann-Konstante)

$$T = \frac{1}{8\pi k_B M} \quad (1.13)$$

ist. Aufgrund von Vakuumfluktuationen sind stets virtuelle Teilchen-Antiteilchen-Paare vorhanden. Gelangt eines hiervon hinter den Ereignishorizont

und kann das andere genügend Energie aus dem Gravitationsfeld gewinnen, so wird es real und entkommt dem Schwarzen Loch. Wegen Energieerhaltung¹ muß das Gravitationsfeld dabei geschwächt werden. Die Masse des Schwarzen Loches nimmt also ab. Bei weiterer Energieabgabe steigt gemäß (1.13) die Temperatur, was typisch für selbstgravitierende Systeme ist [34].

Das in dieser Arbeit untersuchte geeichte $SL(2, \mathbb{R})/U(1)$ -WZNW-Modell hat in zwei Raum-Zeit-Dimensionen die Struktur eines Schwarzen Loches. Als konforme Feldtheorie kann es die Bewegung eines Strings in dem Hintergrund dieses Schwarzen Loches beschreiben. Wir werden im folgenden aber nicht vordergründig den Stringaspekt behandeln, sondern die konforme Feldtheorie exakt lösen, ohne die einschränkenden Virasoro-Nebenbedingungen zu benutzen [35]. Klassisch sichern diese Nebenbedingungen, daß die Lösungen der konformen Feldtheorie auch die Weltfläche der Strings minimieren. Für eine Stringinterpretation müssen deshalb diese Nebenbedingungen nach durchgeführter Quantisierung der konformen Feldtheorie als Bedingungen an die Quantenzustände berücksichtigt werden.

¹In der Allgemeinen Relativitätstheorie gibt es im allgemeinen keinen Energieerhaltungssatz wegen der fehlenden Homogenität der Zeit in gekrümmten Räumen. In Einzelfällen ist die Raum-Zeit jedoch so symmetrisch, daß Erhaltungssätze formuliert werden können. Die Schwarzschild-Metrik ist asymptotisch flach, deshalb können sinnvoll Impuls, Schwerpunkt, Drehimpuls und Energie des Schwarzen Loches definiert werden.

Kapitel 2

Wess-Zumino-Novikov-Witten-Modelle

2.1 Die ungeeichten Wess-Zumino-Novikov-Witten-Modelle

Wess-Zumino-Novikov-Witten-Modelle [36, 37, 38] (im weiteren kurz WZNW-Modelle genannt) sind Sigma-Modelle

$$S_{\text{WZNW}}[g] = \frac{k}{8\pi} \int_M \gamma^{\mu\nu} \text{tr} (g^{-1} \partial_\mu g g^{-1} \partial_\nu g) \sqrt{-\gamma} d^2\xi + k I_{\text{WZ}}[g] \quad (2.1)$$

mit dem zusätzlichen topologischen Wess-Zumino-Term

$$I_{\text{WZ}} = \frac{1}{12\pi} \int_{\substack{B \\ \partial B=M}} \text{tr} (g^{-1} dg \wedge g^{-1} dg \wedge g^{-1} dg) . \quad (2.2)$$

Das Feld $g(\sigma, \tau)$ nimmt Werte aus einer Gruppe G an. Die Wirkung (2.1) ist für kompakte Gruppen G und $k < 0$ positiv definit. Das Vorzeichen von k ist so gewählt worden, daß in dem später zu untersuchenden geeichten $\text{SL}(2, \mathbb{R})/\text{U}(1)$ -WZNW-Modell die Wirkung für $k > 0$ positiv definit wird. Für Gruppen G , die sowohl kompakte als auch nichtkompakte Untergruppen enthalten, ist diese Wirkung für jede Wahl von k indefinit. Zum Wess-Zumino-Term (2.2) ist noch anzumerken, daß er bei Verwendung einer Weltflächenmetrik $\gamma_{\mu\nu}$ mit euklidischer Signatur $(++)$ noch einen Faktor i hätte. Hier wird jedoch eine Metrik mit Minkowski-Signatur $(+-)$ vorausgesetzt.

Die Wirkung (2.1) ist invariant unter Rechts- und Linksmultiplikationen mit Gruppenelementen

$$S_{\text{WZNW}}[g] = S_{\text{WZNW}}[a^{-1}gb], \quad a, b \in G, \quad a, b = \text{const.} \quad (2.3)$$

Die infinitesimale Variante dieser Symmetrie lautet

$$\delta g = T^a g \epsilon_L^a + g T^a \epsilon_R^a, \quad (2.4)$$

wobei T^a die Generatoren der Lie-Algebra von G und ϵ_L^a sowie ϵ_R^a die infinitesimalen Parameter der Symmetrie sind. Mit dem Noether-Verfahren lassen sich daraus die erhaltenen Ströme

$$\begin{aligned} J_L^{a,\nu} &= \frac{k}{4\pi} \text{tr} \left(T^a \partial_\mu g g^{-1} \right) \left(\gamma^{\mu\nu} + \frac{\epsilon^{\mu\nu}}{\sqrt{-\gamma}} \right), \\ J_R^{a,\nu} &= \frac{k}{4\pi} \text{tr} \left(T^a g^{-1} \partial_\mu g \right) \left(\gamma^{\mu\nu} - \frac{\epsilon^{\mu\nu}}{\sqrt{-\gamma}} \right) \end{aligned} \quad (2.5)$$

ableiten. In Lichtkegelkoordinaten $z = \tau + \sigma$, $\bar{z} = \tau - \sigma$ vereinfachen sich diese Ausdrücke zu¹

$$J_{L,z}^a = \frac{k}{2\pi} \text{tr} \left(T^a \partial_z g g^{-1} \right), \quad J_{R,\bar{z}}^a = \frac{k}{2\pi} \text{tr} \left(T^a g^{-1} \partial_{\bar{z}} g \right). \quad (2.6)$$

Da der Energie-Impuls-Tensor der WZNW-Modelle (2.1)

$$T_{\mu\nu} = \frac{k}{4\pi} \text{tr} \left(g^{-1} \partial_\mu g g^{-1} \partial_\nu g - \frac{1}{2} \gamma_{\mu\nu} g^{-1} \partial_\kappa g g^{-1} \partial^\kappa g \right) \quad (2.7)$$

spurlos ist, liegt konforme Invarianz vor, eine für die Stringtheorie auch quantentheoretisch fundamentale Eigenschaft. Deshalb stellt jedes dieser Modelle mit der zentralen Ladung 26 gleichermaßen eine konsistente Lösung der Stringtheorie dar. Mit der Normierung der Generatoren der Lie-Algebra von G

$$\text{tr} (T^a T^b) = \frac{1}{2} \eta^{ab}, \quad \eta^{ab} = \begin{cases} +1 & \text{für } a = b, T^a \text{ Generator einer} \\ & \text{nichtkompakten Untergruppe,} \\ -1 & \text{für } a = b, T^a \text{ Generator einer} \\ & \text{kompakten Untergruppe,} \\ 0 & \end{cases} \quad (2.8)$$

¹Die verwendeten Metrikkonventionen sind im Anhang A zu finden.

erhalten wir in Lichtkegelkoordinaten die Sugawara-Darstellung [39] des Energie-Impuls-Tensors

$$T_{zz} = \frac{2\pi}{k} J_{L,z}^a J_{L,z}^b \eta^{ab}, \quad T_{\bar{z}\bar{z}} = \frac{2\pi}{k} J_{R,\bar{z}}^a J_{R,\bar{z}}^b \eta^{ab}. \quad (2.9)$$

Wir wissen, daß ungeeichte WZNW-Modelle integrabel sind. Um die Integrabilität geeichter WZNW-Modelle nachzuweisen, ist es zweckmäßig, die Eichung der WZNW-Modelle im nächsten Abschnitt völlig allgemein zu behandeln.

2.2 Die geeichten Wess-Zumino-Novikov-Witten-Modelle

Um eine Untergruppe H der Gruppe G zu eichen, muß H geeignet in die Symmetriegruppe $G_L \times G_R$ der Rechts- und Linksmultiplikationen mit Gruppenelementen (2.3) eingebettet werden. Diese Einbettung realisieren wir durch die Homomorphismen L und R

$$\begin{aligned} L : H &\rightarrow G_L, & h &\mapsto L(h), \\ R : H &\rightarrow G_R, & h &\mapsto R(h). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Die Eichtransformationen der WZNW-Felder $g(\sigma, \tau)$ (2.3) lauten also

$$g \rightarrow L(h^{-1})gR(h), \quad h \in H. \quad (2.11)$$

Die homomorphen Abbildungen L und R erzeugen lineare Abbildungen L' und R' der entsprechenden Lie-Algebren

$$\begin{aligned} L' : \text{Lie}(H) &\rightarrow \text{Lie}(G), & T &\mapsto L'(T) = \left. \frac{d}{dt} L(\exp(Tt)) \right|_{t=0}, \\ R' : \text{Lie}(H) &\rightarrow \text{Lie}(G), & T &\mapsto R'(T) = \left. \frac{d}{dt} R(\exp(Tt)) \right|_{t=0}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

T ist hier ein beliebiges Element der Lie-Algebra von H . Die infinitesimale Form der Transformation (2.11) wird dann

$$\delta g = gR'(\delta h) - L'(\delta h)g. \quad (2.13)$$

Die geeichten WZNW-Modelle sind dadurch ausgezeichnet, daß sie nicht nur global für konstantes δh , sondern lokal für beliebiges räumlich und zeitlich veränderliches $\delta h(\sigma, \tau)$ invariant gegenüber dieser Transformation sind. Um das zu gewährleisten, muß ein Eichfeld A_μ eingeführt werden mit dem Transformationsverhalten

$$A_\mu \rightarrow h^{-1} A_\mu h - h^{-1} \partial_\mu h \quad (2.14)$$

bzw. infinitesimal

$$\delta A_\mu = A_\mu \delta h - \delta h A_\mu - \partial_\mu \delta h. \quad (2.15)$$

Der vom Sigma-Modell stammende erste Term der WZNW-Wirkung (2.1) wird eichinvariant durch die übliche Ersetzung der partiellen Ableitung durch die eichkovariante Ableitung

$$\partial_\mu g \rightarrow D_\mu g \equiv \partial_\mu g - L'(A_\mu)g + gR'(A_\mu). \quad (2.16)$$

Zur Definition der eichkovarianten Ableitung ist zu bemerken, daß sie vom Transformationsverhalten des abgeleiteten Feldes abhängt. Das heißt insbesondere für g^{-1} und $g^{-1}D_\mu g$, die sich gemäß

$$g^{-1} \rightarrow R(h^{-1})g^{-1}L(h), \quad g^{-1}D_\mu g \rightarrow R(h^{-1})g^{-1}D_\mu gR(h) \quad (2.17)$$

transformieren, daß ihre kovarianten Ableitungen durch

$$\begin{aligned} D_\mu g^{-1} &\equiv \partial_\mu g^{-1} - R'(A_\mu)g^{-1} + g^{-1}L'(A_\mu), \\ D_\mu (g^{-1}D_\nu g) &\equiv \partial_\mu (g^{-1}D_\nu g) - R'(A_\mu)(g^{-1}D_\nu g) + (g^{-1}D_\nu g)R'(A_\mu) \end{aligned} \quad (2.18)$$

definiert sind.

Die Eichung des Wess-Zumino-Terms ist aufwendiger und wird im Anhang C beschrieben. Sie läßt sich nur unter der Bedingung der Anomaliefreiheit (C.8)

$$\text{tr}(L' \otimes L' - R' \otimes R') = 0 \quad (2.19)$$

durchführen. Es gibt mehrere sich teilweise überlappende Möglichkeiten [17, 18, 19, 20, 21], diese Bedingung zu erfüllen. Die wichtigsten seien hier erwähnt:

- *Die Vektoreichung:* für sie stimmen die linke Einbettung L und die rechte Einbettung R der Gruppe H in die Gruppe G überein

$$L(h) = R(h). \quad (2.20)$$

Dann folgt für die Abbildungen L' und R'

$$L' = R', \quad (2.21)$$

so daß die Bedingung (2.19) offenbar erfüllt ist.

- *Die axiale Eichung:* hierbei werden im Falle einer abelschen Eichgruppe H die Gruppenelemente der linken Einbettung L invers zu den Elementen der rechten Einbettung R gewählt

$$L(h) = R(h^{-1}). \quad (2.22)$$

Für die Abbildungen L' und R' folgt daraus

$$L' = -R', \quad (2.23)$$

so daß die Bedingung der Anomaliefreiheit (2.19) ebenfalls erfüllt ist.

- *Die nilpotenten Einbettungen:* Diese Eichmöglichkeit hat eine besondere Bedeutung für Toda-Theorien, die durch Reduktion aus WZNW-Modellen gewonnen werden können [40, 41]. Hier gilt

$$L' \otimes L' = 0, \quad R' \otimes R' = 0. \quad (2.24)$$

In speziellen Situationen können diese Eichungen auch die Bedingung der Vektoreichung (2.20) oder die der axialen Eichung (2.22) erfüllen. Im allgemeinen läßt (2.24) aber Eichungen zu, bei denen L und R völlig unabhängig voneinander gewählt werden können.

Bei dem später behandelten geeichten $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})/\mathrm{U}(1)$ -WZNW-Modell werden wir die axiale Eichung verwenden.

Ersetzen wir in (2.1) die partiellen Ableitungen durch die eichkovarianten (2.16), (2.18) und eichen den Wess-Zumino-Term gemäß Anhang C, so erhalten wir schließlich die Wirkung der geeichten G/H -WZNW-Modelle

$$\begin{aligned} S_{\mathrm{WZNW}, \text{geeicht}}[g, A] &= S_{\mathrm{WZNW}}[g] + \frac{k}{4\pi} \int_M \sqrt{-\gamma} d^2\xi \times \\ &\times \left[\left(\gamma^{\mu\nu} + \frac{\epsilon^{\mu\nu}}{\sqrt{-\gamma}} \right) \mathrm{tr} (R'(A_\mu) g^{-1} \partial_\nu g) - \left(\gamma^{\mu\nu} - \frac{\epsilon^{\mu\nu}}{\sqrt{-\gamma}} \right) \mathrm{tr} (L'(A_\mu) \partial_\nu g g^{-1}) - \right. \\ &\quad \left. - \left(\gamma^{\mu\nu} - \frac{\epsilon^{\mu\nu}}{\sqrt{-\gamma}} \right) \mathrm{tr} (L'(A_\mu) g R'(A_\nu) g^{-1}) + \gamma^{\mu\nu} \mathrm{tr} (R'(A_\mu) R'(A_\nu)) \right]. \quad (2.25) \end{aligned}$$

Das asymmetrische Auftreten von L und R im letzten Term ist wegen der Bedingung (2.19) nur scheinbar.

In Lichtkegelkoordinaten vereinfacht sich diese Wirkung zu

$$\begin{aligned}
S_{\text{WZNW, geeicht}}[g, A] &= S_{\text{WZNW}}[g] + \frac{k}{2\pi} \int_M dz d\bar{z} \times \\
&\times \left[\text{tr} (R'(A_z) g^{-1} \partial_{\bar{z}} g) - \text{tr} (L'(A_{\bar{z}}) \partial_z g g^{-1}) - \right. \\
&\quad \left. - \text{tr} (R'(A_z) g^{-1} L'(A_{\bar{z}}) g) + \text{tr} (R'(A_z) R'(A_{\bar{z}})) \right].
\end{aligned} \tag{2.26}$$

Im folgenden werden wir finden, daß jedes dieser geeichten G/H -WZNW-Modelle integrabel ist.

2.3 Die Integrabilität der geeichten Wess-Zumino-Novikov-Witten-Modelle

Wir werden in diesem Abschnitt sehen, daß für jedes beliebige geeichte G/H -WZNW-Modell ein Paar linearer Differentialoperatoren existiert, das Lax-Paar, dessen Operatoren genau dann miteinander vertauschbar sind, wenn die nichtlinearen Bewegungsgleichungen dieser Modelle erfüllt sind. Da die Existenz eines Lax-Paares Integrabilität der zugehörigen nichtlinearen Differentialgleichungen bedeutet, wird damit gezeigt, daß alle geeichten WZNW-Modelle integrabel sind. Diese Erkenntnis ist in dieser Allgemeinheit neu, denn eine Lax-Paar-Darstellung existierte bisher nur für nilpotent geeichte WZNW-Modelle [31, 32], denen Toda-Theorien entsprechen.

Wir leiten zunächst die Bewegungsgleichungen der Wirkung (2.26) her und zeigen, daß deren Form direkt auf das Lax-Paar führt. Das Eichfeld A_μ nimmt Werte in der Lie-Algebra der Eichgruppe H an und kann daher folgendermaßen in Komponenten zerlegt werden

$$A_z = A_z^a H^a, \quad A_{\bar{z}} = A_{\bar{z}}^a H^a. \tag{2.27}$$

Hier sind H^a die Generatoren der Eichgruppe H . Diese Generatoren werden durch die Abbildungen R' und L' (2.12) auf Elemente der Lie-Algebra $\text{Lie}(G)$ abgebildet

$$R'(H^a) = R^a, \quad L'(H^a) = L^a, \quad R^a, L^a \in \text{Lie}(G). \tag{2.28}$$

Die Wirkung (2.26) läßt sich dann in der Form

$$\begin{aligned}
S_{\text{WZNW, geeicht}}[g, A] &= S_{\text{WZNW}}[g] + \frac{k}{2\pi} \int_M dz d\bar{z} \times \\
&\times \left[\text{tr} (R^a g^{-1} \partial_{\bar{z}} g) A_z^a - \text{tr} (L^b \partial_z g g^{-1}) A_{\bar{z}}^b + \right. \\
&\quad \left. + \text{tr} (R^a R^b - R^a g^{-1} L^b g) A_z^a A_{\bar{z}}^b \right]
\end{aligned} \tag{2.29}$$

schreiben. Wir definieren

$$J^b \equiv \text{tr} (L^b \partial_z g g^{-1}), \quad \bar{J}^a \equiv \text{tr} (R^a g^{-1} \partial_{\bar{z}} g), \quad M_{ab} \equiv \text{tr} (R^a R^b - R^a g^{-1} L^b g) \tag{2.30}$$

und erhalten die Bewegungsgleichungen für das Eichfeld A_μ aus dem Verschwinden der variierten Wirkung (2.29)

$$\begin{aligned}
\delta_A S_{\text{WZNW, geeicht}}[g, A] &= \\
&= \frac{k}{2\pi} \int_M dz d\bar{z} \left[(\bar{J}^a + M_{ab} A_{\bar{z}}^b) \delta A_z^a + (-J^b + A_z^a M_{ab}) \delta A_{\bar{z}}^b \right]
\end{aligned} \tag{2.31}$$

zu

$$\bar{J}^a + M_{ab} A_{\bar{z}}^b = 0, \quad -J^b + A_z^a M_{ab} = 0. \tag{2.32}$$

Da das Eichfeld nicht dynamisch ist (d.h. ohne Ableitungen in die Wirkung eingeht), lassen sich diese Gleichungen rein algebraisch nach ihm auflösen

$$A_z^a = J^b M_{ba}^{-1} = (J M^{-1})^a, \quad A_{\bar{z}}^a = -M_{ab}^{-1} \bar{J}^b = -(M^{-1} \bar{J})^a. \tag{2.33}$$

Wir setzen diese Lösung in die Wirkung (2.29) ein und erhalten die vom Eichfeld unabhängige Wirkung

$$S_{\text{WZNW, geeicht}}[g] = S_{\text{WZNW}}[g] + \frac{k}{2\pi} \int_M dz d\bar{z} J M^{-1} \bar{J}. \tag{2.34}$$

Es läßt sich direkt nachprüfen, daß sich das durch das Feld g ausgedrückte Eichfeld A_μ (2.33) bei den Eichtransformationen (2.11) tatsächlich wie in (2.14) angegeben transformiert. Deshalb ist wie (2.29) auch die Wirkung (2.34) eichinvariant. Das Prinzip der extremalen Wirkung stellt sicher, daß sich die Bewegungsgleichungen für g bei der Eliminierung des Eichfeldes nicht

ändern. Deshalb können wir diese bestimmen, wenn wir in der Wirkung (2.26) das Feld g unabhängig vom Feld A_μ variieren

$$\begin{aligned} \delta_g S_{\text{WZNW, geeicht}}[g, A[g]] &= \\ &= -\frac{k}{2\pi} \int_M dz d\bar{z} \operatorname{tr} \left[\left(\partial_z (g^{-1} \partial_{\bar{z}} g) - [R'(A_z), g^{-1} \partial_{\bar{z}} g] + R'(\partial_{\bar{z}} A_z) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + [g^{-1} \partial_z g, g^{-1} L'(A_{\bar{z}})g] - g^{-1} L'(\partial_z A_{\bar{z}})g + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + [R'(A_z), g^{-1} L'(A_{\bar{z}})g] \right) g^{-1} \delta g \right]. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Die Variation $\delta_g S_{\text{WZNW, geeicht}}[g, A[g]]$ soll für jede Variation δg verschwinden. Mit den Definitionen

$$B \equiv R'(A_z), \quad \bar{B} \equiv g^{-1} L'(A_{\bar{z}})g \quad (2.36)$$

erhalten wir deshalb aus (2.35) die Bewegungsgleichung

$$\partial_z (g^{-1} \partial_{\bar{z}} g) - [B, g^{-1} \partial_{\bar{z}} g] - \partial_z \bar{B} + \partial_{\bar{z}} B + [B, \bar{B}] = 0. \quad (2.37)$$

Ihr Transformationsverhalten unter der Eichtransformation (2.11) läßt sich am besten erkennen, wenn wir sie durch eichkovariante Ableitungen (2.18) ausdrücken

$$D_z (g^{-1} D_{\bar{z}} g) - R'(F_{z\bar{z}}) = 0. \quad (2.38)$$

Hierbei ist

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - [A_\mu, A_\nu] \quad (2.39)$$

die zum Eichfeld A_μ gehörende Feldstärke, die sich in bekannter Weise eichtransformiert

$$F_{\mu\nu} \rightarrow h^{-1} F_{\mu\nu} h. \quad (2.40)$$

Aus der Bewegungsgleichung (2.38) wird bei der Eichtransformation (2.11)

$$R(h^{-1}) (D_z (g^{-1} D_{\bar{z}} g) - R'(F_{z\bar{z}})) R(h) = 0. \quad (2.41)$$

Das hat eine interessante Konsequenz: parametrisieren wir nämlich die Gruppenelemente g analog zu einer Gaußschen Zerlegung

$$\begin{aligned} g(x^\alpha, y^a) &= L(h(y^a))^{-1} g_0(x^\alpha) R(h(y^a)), & \alpha &= 1, \dots, \dim G - \dim H, \\ & & a &= 1, \dots, \dim H, \end{aligned} \quad (2.42)$$

wobei $g_0(x^\alpha)$ eine Teilmenge der Gruppe G beschreibt und y^a Parameter der Gruppe H sind, dann erhalten wir aus (2.41) die Bewegungsgleichungen für die Felder x^α, y^a

$$R(h(y^a))^{-1} (D_z (g_0(x^\alpha)^{-1} D_{\bar{z}} g_0(x^\alpha)) - R'(F_{z\bar{z}}[g_0(x^\alpha)])) R(h(y^a)) = 0. \quad (2.43)$$

Das sind in Wirklichkeit aber nur Bewegungsgleichungen für x^α . Das ist nicht verwunderlich, da mit der Gaußschen Zerlegung (2.42) die Wirkung (2.34) wegen der Eichinvarianz gar nicht von den Feldern y^a abhängt. Andererseits ist die Bewegungsgleichung (2.38) eine Gleichung zwischen Elementen der Lie-Algebra von G . In Komponenten ausgeschrieben sind es $\dim G$ Gleichungen für $\dim G - \dim H$ Felder. Diese scheinbare Überbestimmtheit des Gleichungssystems erklärt sich ebenfalls aus der Eichinvarianz der Wirkung (2.34). Unter den Variationen (2.35) befinden sich nämlich auch die reinen Eichvariationen (2.13). Setzen wir diese in die Gleichung (2.35) ein und beachten, daß wegen der Eichinvarianz die Variation der Wirkung verschwindet, erhalten wir die $\dim H$ Identitäten

$$\text{tr} ((D_z (g^{-1} D_{\bar{z}} g) - R'(F_{z\bar{z}})) (R^a - g^{-1} L^a g)) = 0. \quad (2.44)$$

Diese Identitäten zeigen, daß von den $\dim G$ Komponenten der Bewegungsgleichung (2.38) nur $\dim G - \dim H$ linear unabhängig sind, was genau der Anzahl der Felder x^α entspricht.

Wir kommen jetzt leicht zum gesuchten Lax-Paar, denn die Bewegungsgleichung (2.37) kann wie folgt geschrieben werden

$$[\partial_z - B, g^{-1} \partial_{\bar{z}} g] + [\partial_z - B, \partial_{\bar{z}} - \bar{B}] = [\partial_z - B, \partial_{\bar{z}} + g^{-1} \partial_{\bar{z}} g - \bar{B}] = 0. \quad (2.45)$$

Nun besitzt aber ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung

$$(\partial_z - B) \Psi = 0, \quad (\partial_{\bar{z}} + g^{-1} \partial_{\bar{z}} g - \bar{B}) \Psi = 0 \quad (2.46)$$

nur dann eine nichttriviale Lösung Ψ , wenn die beiden Differentialoperatoren $\partial_z - B$ und $\partial_{\bar{z}} + g^{-1} \partial_{\bar{z}} g - \bar{B}$ miteinander vertauschbar sind. Das heißt für uns, daß das Lösen der Bewegungsgleichungen des geeichten WZNW-Modells (2.37) äquivalent zum Lösen des linearen Gleichungssystems (2.46) ist. Das lineare Gleichungssystem (2.46) ist folglich ein Lax-Paar für das geeichte G/H -WZNW-Modell.

Wir haben also mit dem Auffinden eines Lax-Paares gezeigt, daß alle geeichten WZNW-Modelle integrabel sind. Das trifft dann insbesondere auch

für das in dieser Arbeit untersuchte geeichte $SL(2, \mathbb{R})/U(1)$ -WZNW-Modell zu, dessen Integrabilität bisher nur durch seine Einbettung in eine nichtabelsche Toda-Theorie [31, 32] bzw. wegen seiner gegenüber anderen konformen Feldtheorien zusätzlichen Erhaltungsgrößen erwartet wurde [15, 28, 29, 30]. Der hier angegebene Integrabilitätsbeweis ist eine wichtige Voraussetzung für den in der Einführung genannten Weg, die kanonische Quantisierung des geeichten $SL(2, \mathbb{R})/U(1)$ -WZNW-Modells über die exakte analytische Lösung des Modells zu erreichen.

2.4 Das geeichte $SL(2, \mathbb{R})/U(1)$ -Wess-Zumino-Novikov-Witten-Modell nach Eliminierung des Eichfeldes durch seine Bewegungsgleichungen

Wir wollen im weiteren ausschließlich das $SL(2, \mathbb{R})/U(1)$ -WZNW-Modell untersuchen, das uns insbesondere als ein integrables Modell Schwarzer Löcher interessiert [15]. Dazu müssen wir zunächst seine effektive Wirkung, die das $U(1)$ -Eichfeld nicht mehr enthält, herleiten. Aus Gründen, die erst im nächsten Abschnitt deutlich werden, beschränken wir uns hierbei auf das im Abschnitt 2.3 beschriebene rein klassische Verfahren. Anschließend geben wir explizit das dazugehörige Laxpaar (2.46) an.

Wir parametrisieren die Gruppe $SL(2, \mathbb{R})$ gemäß der allgemeinen Vorschrift (2.42) durch

$$\begin{aligned} g &= g(r, t, \alpha) = \exp((2\alpha - t)I/2) \exp(rJ) \exp((2\alpha + t)I/2) \\ &= \begin{pmatrix} \cosh r \cos 2\alpha + \sinh r \cos t & \cosh r \sin 2\alpha + \sinh r \sin t \\ -\cosh r \sin 2\alpha + \sinh r \sin t & \cosh r \cos 2\alpha - \sinh r \cos t \end{pmatrix}, \\ &0 \leq r < \infty, \quad 0 \leq t < 2\pi, \quad 0 \leq \alpha < \pi. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Hierbei sind I und J die Matrizen

$$I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.48)$$

Es wird die Untergruppe $U(1)$ mit den Gruppenelementen

$$h(\alpha) = \exp(i\alpha), \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad (2.49)$$

geeicht. Die Homomorphismen L und R (2.10) sind jetzt gegeben durch

$$L, R : H \rightarrow G, \quad h = \exp(i\alpha) \mapsto L(h) = \exp(-\alpha I), R(h) = \exp(\alpha I). \quad (2.50)$$

Sie sind isomorph. Ein Vergleich mit (2.22) zeigt, daß wir es mit der axialen Eichung zu tun haben. Die Gruppe H hat als Generator

$$H^1 = \left. \frac{\partial h(\alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = i, \quad (2.51)$$

der durch die Abbildungen $-L' = R'$ auf das Lie-Algebra-Element

$$-L^1 = -L'(H^1) = R^1 = R'(H^1) = I \quad (2.52)$$

abgebildet wird. Die Größen J^a , \bar{J}^a und M_{ab} (2.30) werden

$$\begin{aligned} J^1 &= 2 \sinh^2 r \partial_z t + 4 \cosh^2 r \partial_z \alpha, & \bar{J}^1 &= 2 \sinh^2 r \partial_{\bar{z}} t - 4 \cosh^2 r \partial_{\bar{z}} \alpha, \\ M_{11} &= -4 \cosh^2 r. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Für die Wirkung des ungeeichten WZNW-Modells (2.1) ergibt sich jetzt

$$\begin{aligned} S_{\text{WZNW}}[r, t, \alpha] &= \frac{k}{2\pi} \int_M dz d\bar{z} (\partial_z r \partial_{\bar{z}} r + \sinh^2 r \partial_z t \partial_{\bar{z}} t - \\ &\quad - 4 \cosh^2 r \partial_z \alpha \partial_{\bar{z}} \alpha + 2 \sinh^2 r (\partial_z \alpha \partial_{\bar{z}} t - \partial_z t \partial_{\bar{z}} \alpha)) \end{aligned} \quad (2.54)$$

und daraus die (2.29) entsprechende Wirkung des geeichten $\text{SL}(2, \mathbb{R})/\text{U}(1)$ -WZNW-Modells

$$\begin{aligned} S_{\text{WZNW, geeicht}}[r, t, \alpha, A] &= \frac{k}{2\pi} \int_M dz d\bar{z} \left(\partial_z r \partial_{\bar{z}} r + \tanh^2 r \partial_z t \partial_{\bar{z}} t - \right. \\ &\quad \left. - 4 \cosh^2 r \left(A_z^1 + \partial_z \alpha + \frac{1}{2} \tanh^2 r \partial_z t \right) \left(A_{\bar{z}}^1 + \partial_{\bar{z}} \alpha - \frac{1}{2} \tanh^2 r \partial_{\bar{z}} t \right) \right). \end{aligned} \quad (2.55)$$

Wir sehen sofort, daß das Eichfeld nicht dynamisch ist. Seine Bewegungsgleichungen

$$A_z^1 = -\partial_z \alpha - \frac{1}{2} \tanh^2 r \partial_z t, \quad A_{\bar{z}}^1 = -\partial_{\bar{z}} \alpha + \frac{1}{2} \tanh^2 r \partial_{\bar{z}} t \quad (2.56)$$

sind algebraisch, und sie implizieren zusammen mit den Bewegungsgleichungen der restlichen Felder, daß die Feldstärke verschwindet [28, 29, 30]

$$F_{z\bar{z}}^1 = \partial_z A_{\bar{z}}^1 - \partial_{\bar{z}} A_z^1 = 0. \quad (2.57)$$

Eliminieren wir schließlich das Eichfeld mit Hilfe dieser algebraischen Bewegungsgleichungen, so erhalten wir die der allgemeinen Form (2.34) entsprechende rein klassische Wirkung des geeichten $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})/\mathrm{U}(1)$ -WZNW-Modells

$$S_{\mathrm{WZNW}, \text{geeicht}}[r, t] = \frac{k}{2\pi} \int_M dz d\bar{z} \left(\partial_z r \partial_{\bar{z}} r + \tanh^2 r \partial_z t \partial_{\bar{z}} t \right). \quad (2.58)$$

Wir wissen bereits, daß dieses Modell integrabel ist. Sein Lax-Paar erhalten wir aus der allgemeinen Darstellung (2.46). Wir werden es im folgenden konkret angeben.

Die Parametrisierung der Gruppe (2.47) ist so gewählt worden, daß sie die Form (2.42) hat, wobei

$$x^1 = r, \quad x^2 = t \quad y^1 = \alpha. \quad (2.59)$$

Wie der Gleichung (2.43) zu entnehmen ist, hat α keine Dynamik, und es kann durch eine Eichtransformation zum Verschwinden gebracht werden. Dementsprechend hängt auch die Wirkung (2.58) nicht von α ab, und wir wählen im weiteren stets $\alpha = 0$, wodurch wir gleichzeitig auch die Eichinvarianz des Modells fixiert haben.

Unter Benutzung der Gleichungen (2.47), (2.52) und (2.56) lassen sich B und \bar{B} aus den Definitionen (2.36) bestimmen

$$\begin{aligned} B &= -\frac{1}{2} \tanh^2 r \partial_z t I \\ \bar{B} - g^{-1} \partial_{\bar{z}} g &= \frac{1}{2} \tanh^2 r \partial_{\bar{z}} t I + (\tanh r \sin t \partial_{\bar{z}} t - \cos t \partial_{\bar{z}} r) J + \\ &\quad + (\tanh r \cos t \partial_z t + \sin t \partial_z r) IJ. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Definieren wir weiter

$$C = B, \quad \bar{C} = \bar{B} - g^{-1} \partial_{\bar{z}} g \quad (2.61)$$

und schreiben C und \bar{C} in Komponenten bezüglich der Basis $\{T^1 = I, T^2 = J, T^3 = IJ\}$ der Lie-Algebra der Gruppe $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$

$$C = C_a T^a, \quad \bar{C} = \bar{C}_a T^a, \quad (a = 1, 2, 3), \quad (2.62)$$

so erhalten wir

$$\begin{aligned} C_1 &= -\frac{1}{2} \tanh^2 r \partial_z t, \quad C_2 = C_3 = 0, \quad \bar{C}_2 = \frac{1}{2} \tanh^2 r \partial_{\bar{z}} t, \\ \bar{C}_2 &= -\frac{1}{\cosh r} \partial_{\bar{z}} (\sinh r \cos t), \quad \bar{C}_3 = \frac{1}{\cosh r} \partial_{\bar{z}} (\sinh r \sin t). \end{aligned} \quad (2.63)$$

Dann ist gemäß (2.46) und (2.61) das Lax-Paar durch die Operatoren

$$\partial_z - C \quad \text{und} \quad \partial_{\bar{z}} - \bar{C} \quad (2.64)$$

gegeben. Wir wollen nun nachprüfen, daß die sich aus

$$[\partial_z - C, \partial_{\bar{z}} - \bar{C}] = -(\partial_z \bar{C} - \partial_{\bar{z}} C - [C, \bar{C}]) = 0 \quad (2.65)$$

ergebenden Gleichungen tatsächlich äquivalent zu den Bewegungsgleichungen für r und t sind. Dazu schreiben wir Gleichung (2.65) in Komponenten auf

$$\partial_z \bar{C}_1 - \partial_{\bar{z}} C_1 + 2(C_2 \bar{C}_3 - C_3 \bar{C}_2) = 0, \quad (2.66)$$

$$\partial_z \bar{C}_2 - \partial_{\bar{z}} C_2 + 2(C_1 \bar{C}_3 - C_3 \bar{C}_1) = 0, \quad (2.67)$$

$$\partial_z \bar{C}_3 - \partial_{\bar{z}} C_3 - 2(C_1 \bar{C}_2 - C_2 \bar{C}_1) = 0. \quad (2.68)$$

Wegen $C_2 = C_3 = 0$ vereinfachen sich diese Gleichungen zu

$$\partial_z \bar{C}_1 - \partial_{\bar{z}} C_1 = 0, \quad (2.69)$$

$$\partial_z \bar{C}_2 + 2C_1 \bar{C}_3 = 0, \quad (2.70)$$

$$\partial_z \bar{C}_3 - 2C_1 \bar{C}_2 = 0. \quad (2.71)$$

Die erste dieser Gleichungen ist bis auf einen Faktor identisch mit der Bewegungsgleichung

$$\partial_z (\tanh^2 r \partial_{\bar{z}} t) + \partial_{\bar{z}} (\tanh^2 r \partial_z t) = 0. \quad (2.72)$$

Definieren wir

$$\bar{D}_{\pm} \equiv -\bar{C}_2 \pm i\bar{C}_3 = \frac{1}{\cosh r} \partial_{\bar{z}} (\sinh r e^{\pm it}), \quad (2.73)$$

dann lassen sich die Gleichungen (2.70) und (2.71) zusammenfassen zu

$$\partial_z \bar{D}_{\pm} \pm 2iC_1 \bar{D}_{\pm} = 0, \quad (2.74)$$

oder ausgeschrieben gilt

$$\partial_z \left(\frac{1}{\cosh r} \partial_{\bar{z}} (\sinh r e^{\pm it}) \right) \mp i \tanh^2 r \partial_z t \frac{1}{\cosh r} \partial_{\bar{z}} (\sinh r e^{\pm it}) = 0. \quad (2.75)$$

Das führt auf die Gleichungen

$$e^{\pm it} \left(\partial_z \partial_{\bar{z}} r - \frac{\sinh r}{\cosh^3 r} \partial_z t \partial_{\bar{z}} t \pm i \tanh r \left(\partial_z \partial_{\bar{z}} t + \frac{\partial_z t \partial_{\bar{z}} r + \partial_z r \partial_{\bar{z}} t}{\sinh r \cosh r} \right) \right) = 0, \quad (2.76)$$

die äquivalent sind mit den Bewegungsgleichungen der Wirkung (2.58) für r und t

$$\partial_z \partial_{\bar{z}} r - \frac{\sinh r}{\cosh^3 r} \partial_z t \partial_{\bar{z}} t = 0, \quad \partial_z \partial_{\bar{z}} t + \frac{\partial_z t \partial_{\bar{z}} r + \partial_z r \partial_{\bar{z}} t}{\sinh r \cosh r} = 0. \quad (2.77)$$

Die letztere dieser Gleichungen ist auch äquivalent zur Gleichung (2.72). Wir wissen bereits, daß nur zwei der Gleichungen (2.69), (2.70) und (2.71) wegen der $U(1)$ -Eichinvarianz unabhängig voneinander sind (vgl. die Diskussion der Gleichungen (2.43)). Damit haben wir auch im konkreten Falle die Integrabilität des geeichten $SL(2, \mathbb{R})/U(1)$ -WZNW-Modelles nachgewiesen.

Die Wirkung (2.58) wird, wie bereits angedeutet, allen weiteren Rechnungen zugrunde liegen. Sie wurde zuerst von den Autoren der Ref. [28, 29, 30] abgeleitet. In der Literatur wurde bisher die Eliminierung des Eichfeldes mittels Pfadintegration bevorzugt. Wir werden im nächsten Abschnitt sehen, daß dabei bisher ungelöste Probleme auftreten, die uns motivieren werden, in dieser Arbeit den gerade beschriebenen rein klassischen Weg zu beschreiten.

2.5 Bemerkungen zur Eliminierung des Eichfeldes mittels Pfadintegration

In der Literatur [17, 18, 19, 20, 21] definiert üblicherweise die Wirkung (2.55) mit dem Eichfeld $A_z, A_{\bar{z}}$ das geeichte $SL(2, \mathbb{R})/U(1)$ -WZNW-Modell. Damit läßt sich auf einfache Weise eine Verbindung zu den rein algebraisch beschriebenen konformen Coset-Modellen [16] herstellen. Bei letzteren wird aus der Stromalgebra eines WZNW-Modells eine geeignete Teilmenge derart ausgewählt, daß die für die konformen Eigenschaften der Feldtheorie notwendig vorhandene Virasoro-Algebra konstruiert werden kann. In der Wirkung (2.55) fungiert das Eichfeld als Lagrangemultiplikator für die Nebenbedingungen, die gerade diese Einschränkung der Stromalgebra bewirken.

Für eine mögliche stringtheoretische Interpretation dieser konformen Feldtheorie ist es aber erforderlich, das als Hilfsfeld agierende Eichfeld aus der Wirkung zu eliminieren. Wir hatten bereits gesehen, daß die Wirkungen der geeichten WZNW-Modelle mit oder ohne Eichfeld klassisch zueinander äquivalent sind. Quantentheoretisch könnte aber die Reihenfolge der Schritte *Quantisierung* und *Eliminierung des Eichfeldes* durchaus von Belang sein. Deshalb wollen wir hier Versuche diskutieren, das Eichfeld nach seiner Quantisierung zu eliminieren. Das geschieht üblicherweise durch Pfadintegration

im Zustandsintegral

$$Z = \int \mathcal{D}r \mathcal{D}t \mathcal{D}\alpha \mathcal{D}A \sqrt{|\text{Det}^{(3)}G_0|} \exp(-S_{\text{WZNW, geeicht}}[r, t, \alpha, A]) \delta[\alpha]. \quad (2.78)$$

Da die folgenden Rechnungen im Unterschied zu allen anderen Betrachtungen dieser Arbeit oft nur heuristischen Charakter haben, wird der überwiegende Teil der Untersuchungen im Anhang E dargestellt. Hier werden wir nur die für das bessere Verständnis der Gesamtsituation wichtigen Teilaussagen anführen. Sie verstärken unsere Motivation, die vollständige Lösung der *klassischen* Theorie zu suchen.

Um gewisse Faktoren zu vermeiden, werden wir in diesem Abschnitt der Weltflächenmetrik die Signatur $(++)$ geben. $S_{\text{WZNW, geeicht}}[r, t, \alpha, A]$ ist jetzt die Wirkung des geeichten $\text{SL}(2, \mathbb{R})/\text{U}(1)$ -Modells mit Eichfeld (2.55). Die Eichinvarianz wurde in (2.78) bereits durch die Bedingung

$$\alpha \equiv 0 \quad (2.79)$$

fixiert. Die Fadeev-Popov-Determinante dieser Eichbedingung ist Eins, so daß keine Geistfelder eingeführt zu werden brauchen. $\text{Det}^{(3)}G_0$ bezeichnet die Funktionaldeterminante der Targetraummetrik des ungeeichten WZNW-Modells (2.54)

$$G_{0,mn}[r, t, \alpha] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sinh^2 r & 0 \\ 0 & 0 & -4 \cosh^2 r \end{pmatrix}, \quad (2.80)$$

dessen Felder r , t und α hierbei gerade die Koordinaten einer dreidimensionalen Raum-Zeit sind. Ein hochgestellter Index (n) am Symbol $\text{Det}^{(n)}$ soll verdeutlichen, daß es die Funktionaldeterminante eines $n \times n$ -matrixförmigen Operators ist.

Dank des eichfixierenden δ -Funktionalen läßt sich die α -Integration in (2.78) sofort ausführen

$$\begin{aligned} Z &= \int \mathcal{D}r \mathcal{D}t \mathcal{D}A \sqrt{|\text{Det}^{(3)}G_0|} \exp(-S_{\text{WZNW, geeicht}}[r, t, 0, A]) \\ &= \int \mathcal{D}r \mathcal{D}t \mathcal{D}A \sqrt{|\text{Det}^{(3)}G_0|} \exp\left(-S_{\text{WZNW, geeicht}}[r, t] + \frac{k}{\pi} \int_M \sqrt{\gamma} d^2\xi \times \right. \\ &\quad \left. \times \cosh^2 r \gamma^{\mu\nu} \left(A_\mu - \frac{1}{2} \tanh^2 r \epsilon_\mu{}^\kappa \partial_\kappa t\right) \left(A_\nu - \frac{1}{2} \tanh^2 r \epsilon_\nu{}^\lambda \partial_\lambda t\right)\right). \end{aligned} \quad (2.81)$$

Wir können hier das neue Feld

$$A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{2} \tanh^2 r \, \epsilon_\mu{}^\kappa \partial_\kappa t$$

eingeführen, was keine Jakobi-Determinante erfordert

$$\begin{aligned} Z = \int \mathcal{D}r \mathcal{D}t \mathcal{D}A \sqrt{|\text{Det}^{(3)} G_0|} \exp \left(-S_{\text{WZNW, geeicht}}[r, t] + \right. \\ \left. + \frac{k}{\pi} \int_M \sqrt{\gamma} d^2 \xi \cosh^2 r \, \gamma^{\mu\nu} A_\mu A_\nu \right). \end{aligned} \quad (2.82)$$

Zur Ausintegration des Eichfeldes haben wir somit das Funktionalintegral

$$I[\gamma, r] = \int \mathcal{D}A \sqrt{|\text{Det}^{(3)} G_0|} \exp \left(\frac{k}{\pi} \int_M \sqrt{\gamma} d^2 \xi \cosh^2 r \, \gamma^{\mu\nu} A_\mu A_\nu \right) \quad (2.83)$$

zu betrachten. Dieses Integral ist offenbar nur für negative k sinnvoll definiert. Deshalb werden wir für die A -Integration annehmen, daß k negativ ist. Nach der Integration lassen wir diese Einschränkung wieder fallen und setzen das Ergebnis analytisch in den Bereich positiver k fort.² Diese Funktionalintegration ist aber das eigentliche und immer noch nicht verstandene Problem bei der Definition einer effektiven Wirkung für das geeichte $\text{SL}(2, \mathbb{R})/\text{U}(1)$ -WZNW-Modell.

Wir werden im folgenden einmal über das Eichfeld direkt integrieren und ein anderes Mal das Eichfeld erst auf zwei skalare Felder transformieren, über die dann integriert wird.

Direkte Integration über das Eichfeld: sie führt einfach auf ein Gaußsches Integral

$$\int \mathcal{D}A \exp \left(\frac{k}{\pi} \int_M \sqrt{\gamma} d^2 \xi \cosh^2 r \, \gamma^{\mu\nu} A_\mu A_\nu \right) = \text{Det}^{(1)} \left(\frac{k}{\pi^2} \cosh^2 r \, (\xi) \right)^{-1} \quad (2.84)$$

²Ein ähnliches Verhalten zeigen Gaußsche Pfadintegrale, wenn die Weltflächenmetrik die Signatur $(+, -)$ hat. Dann steht vor der Wirkung ein zusätzlicher Faktor $-i$, und die Gaußschen Integrale sind für jedes Vorzeichen des Exponenten definierbar. Es zeigt sich, daß der Wert des Integrals für ein bestimmtes Vorzeichen durch analytische Fortsetzung aus dem Integral für das andere Vorzeichen erhalten werden kann.

Tatsächlich wurde über zwei Felder A_1 und A_2 integriert, weshalb der Exponent der Determinante $-\frac{2}{2} = -1$ ist. Durch Zusammenfassen der Determinanten von (2.84) und (2.83) unter Vernachlässigung einiger physikalisch irrelevanter Normierungskonstanten erhalten wir schließlich

$$Z = \int \mathcal{D}r \mathcal{D}t \sqrt{|\text{Det}^{(2)}[G]|} \exp(-S_{\text{WZNW, geeicht}}[r, t]). \quad (2.85)$$

Hier ist $S_{\text{WZNW, geeicht}}[r, t]$ identisch zur Wirkung (2.58), und

$$G_{mn}(r, t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tanh^2 r \end{pmatrix} \quad (2.86)$$

ist die zugehörige Targetraummetrik. Dieser Zugang scheint also völlig äquivalent zu dem zu sein, das Eichfeld in der klassischen Wirkung mittels seiner Bewegungsgleichungen zu eliminieren. Die konforme Invarianz der klassischen Wirkung $S_{\text{WZNW, geeicht}}[r, t]$ (2.58) wird im allgemeinen durch quantentheoretische Anomalien gebrochen. Die Bedingungen für konforme Anomaliefreiheit können im allgemeinen nichtlinearen Sigma-Modell (1.5) störungstheoretisch berechnet werden. Sie besagen in niedrigster Ordnung von α' (1.6), daß die Targetraummetrik einen verschwindenden Ricci-Tensor besitzen muß, und das ist für (2.86) nicht der Fall. Offenbar liefert das Modell (2.58) zumindest im Rahmen der Störungstheorie die gewünschte konforme Quantenfeldtheorie nicht. Hier tritt üblicherweise das Dilaton in Erscheinung, das konforme Invarianz zu sichern hat.

Integration mittels Einführung zweier skalarer Hilfsfelder: diese Integrationsmöglichkeit ist formal identisch zur Ableitung der Quanten- T -Dualität in nichtlinearen Sigma-Modellen [42], bei der zumindest in niedrigster Ordnung α' der Störungstheorie die konforme Invarianz erhalten bleibt. Hierbei wird das Vektorfeld A_μ durch zwei skalare Felder ϕ, χ dargestellt³

$$A_\mu = \partial_\mu \phi + \epsilon_\mu{}^\nu \partial_\nu \chi. \quad (2.87)$$

Aus dem Funktionenabstand

$$||\delta A||^2 = - \int \delta\phi(\xi) \Delta \delta\phi(\xi) \sqrt{\gamma} d^2\xi - \int \delta\chi(\xi) \Delta \delta\chi(\xi) \sqrt{\gamma} d^2\xi \quad (2.88)$$

³Zur Vereinfachung nehmen wir an, daß dadurch alle Feldkonfigurationen erfaßt werden. Im allgemeinen lautet die Zerlegung $A_\mu = \partial_\mu \phi + \epsilon_\mu{}^\nu \partial_\nu \chi + \omega_\mu$ mit $\partial^\mu \omega_\mu = \epsilon^{\mu\nu} \partial_\mu \omega_\nu = 0$. Der Vektorraum der ω_μ ist gewöhnlich endlichdimensional.

ergibt sich eine Jakobi-Determinante

$$\left\| \frac{\delta A_\mu}{\delta(\phi, \chi)} \right\| = \left| \text{Det}^{(1)}(-\Delta) \right|, \quad (2.89)$$

die bei dieser Transformation berücksichtigt werden muß, und wir erhalten

$$I[\gamma, r] = \text{Det}^{(1)}(-\Delta) \times \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\chi \sqrt{|\text{Det}^{(3)}G_0|} \exp \left(- \int (\phi(\xi), \chi(\xi)) M \begin{pmatrix} \phi(\xi) \\ \chi(\xi) \end{pmatrix} \sqrt{\gamma} d^2\xi \right). \quad (2.90)$$

M ist der matrixförmige Differentialoperator

$$M = \frac{k/\pi}{\sqrt{\gamma}} \begin{pmatrix} \partial_\mu (\cosh^2 r \gamma^{\mu\nu} \sqrt{\gamma} \partial_\nu) & \epsilon^{\mu\nu} \partial_\mu \cosh^2 r \partial_\nu \\ -\epsilon^{\mu\nu} \partial_\mu \cosh^2 r \partial_\nu & \partial_\mu (\cosh^2 r \gamma^{\mu\nu} \sqrt{\gamma} \partial_\nu) \end{pmatrix}. \quad (2.91)$$

Ähnlich wie bei der bereits diskutierten Pfadintegration (2.84) muß sich bei der Integration (2.90) die Funktionaldeterminante $\text{Det}^{(3)}G_0$ in $\text{Det}^{(2)}G$ verändern. Wegen der Abhängigkeit des Operators M vom Feld $r(\xi)$ ist allerdings zu erwarten, daß diese Integration auch Korrekturen zur Targetraum-Metrik (2.86) bringt. Eine exakte Berechnung dieser Strukturen ist bisher nicht gelungen. Dies wäre aber für eine akzeptable Definition einer auf diesem Wege gewonnenen effektiven Wirkung notwendig. Im Anhang E kann die Integration von (2.90) unter Zuhilfenahme heuristischer Argumente zurückgeführt werden auf die Berechnung der Funktionaldeterminante

$$\text{Det}^{(2)}M', \quad (2.92)$$

wobei der Laplace-ähnliche Operator M' aus M durch Abspaltung eines Vorfaktors

$$M = e^{g(\xi)} M' \quad (2.93)$$

mit

$$g = \ln \cosh^2 r + \text{const}, \quad M' = - \begin{pmatrix} \partial^2 + \partial^\mu g \partial_\mu & \epsilon^{\mu\nu} \partial_\mu g \partial_\nu \\ -\epsilon^{\mu\nu} \partial_\mu g \partial_\nu & \partial^2 + \partial^\mu g \partial_\mu \end{pmatrix} \quad (2.94)$$

definiert wird. Grundsätzlich läßt sich $\text{Det}^{(2)}(M')$ näherungsweise berechnen, indem beispielsweise nach Potenzen von $g(\xi)$ und dessen Ableitungen entwickelt wird. Dabei sind Terme mit zwei partiellen Ableitungen Korrekturbeiträge zum kinetischen Teil der Wirkung $S_{\text{WZNW, geeicht}}$ (2.58). Schwierig wird in diesem Zusammenhang jedoch die Interpretation der Terme mit

mehr als zwei Ableitungen, da sie nicht in die allgemeine Form der Sigma-Modelle (1.5) passen. Aus diesen Gründen eliminieren wir in dieser Arbeit das Eichfeld klassisch und betrachten die dabei entstehende integrable konforme Feldtheorie (2.58) als Basis für alle weiteren Untersuchungen.

2.6 Die Interpretation des $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})/\mathrm{U}(1)$ -Wess-Zumino-Novikov-Witten-Modells

Dieser Abschnitt behandelt die Interpretation der Targetraum-Metrik (2.86) des geeichten $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})/\mathrm{U}(1)$ -WZNW-Modells. Das Linienelement dieser Metrik ist

$$ds^2 = dr^2 + \tanh^2 r \, dt^2, \quad (2.95)$$

aus dem durch Wick-Rotation

$$t \rightarrow it \quad (2.96)$$

das Linienelement

$$ds^2 = dr^2 - \tanh^2 r \, dt^2 \quad (2.97)$$

entsteht. Diese Metrik ist für $r = 0$ scheinbar singulär, weil ihre Determinante verschwindet. Diese Singularität ist vergleichbar mit der Koordinatensingularität der Metrik (1.7) bei $r = 2M$. Auch hier zeigen die Komponenten des Krümmungstensors

$$R^t{}_{rt} = \frac{2}{\cosh^2 r} \quad (2.98)$$

und seine Invarianten

$$R^{\mu_1 \nu_1}{}_{\mu_2 \nu_2} R^{\mu_2 \nu_2}{}_{\mu_3 \nu_3} \dots R^{\mu_n \nu_n}{}_{\mu_1 \nu_1} = \frac{2^{2n}}{\cosh^{2n} r} \quad (2.99)$$

kein singuläres Verhalten an dieser Stelle. Um diese scheinbare Singularität zu eliminieren, führen wir Lichtkegelkoordinaten

$$u = -\sinh r \, e^{-t}, \quad v = \sinh r \, e^t \quad (2.100)$$

ein und erhalten

$$ds^2 = -\frac{du dv}{1 - uv}. \quad (2.101)$$

Die nullartigen Geodäten $ds^2 = 0$ sind in diesen Koordinaten die Linien $du = 0$ oder $dv = 0$, also $u = \text{const}$ oder $v = \text{const}$. In diesen Koordinaten erkennen wir eine Singularität bei

$$uv = 1, \quad (2.102)$$

die sich auch in den Invarianten des Krümmungstensors (2.99) manifestiert

$$R^{\mu_1 \nu_1}_{\mu_2 \nu_2} R^{\mu_2 \nu_2}_{\mu_3 \nu_3} \dots R^{\mu_n \nu_n}_{\mu_1 \nu_1} = \frac{4^n}{(1 - uv)^{2n}}. \quad (2.103)$$

Wir wollen jetzt das Linienelement (2.101) mit der vierdimensionalen Schwarzen-Loch-Metrik in Kruskalkoordinaten (1.12) vergleichen. Dabei unterdrücken wir die Winkelvariablen θ und ϕ und erhalten

$$ds^2 = -\frac{32M^3}{r} \exp\left(-\frac{r}{2M}\right) dudv. \quad (2.104)$$

Die Kruskalkoordinaten (1.11) sind dergestalt, daß uv eine Funktion von r ist

$$uv = -\left(\frac{r}{2M} - 1\right) \exp\left(\frac{r}{2M}\right). \quad (2.105)$$

Das ist für $r > 0$ eine streng monoton fallende Funktion, die folglich invertierbar ist. Daher kann im Linienelement (2.104) r durch uv ausgedrückt werden

$$ds^2 = -16M^2 \frac{dudv}{f(uv)}, \quad (2.106)$$

wobei f unter Berücksichtigung von (2.105) durch

$$f(uv) = \frac{r}{2M} \exp\left(\frac{r}{2M}\right) \quad (2.107)$$

gegeben ist. Die Funktion $f(uv)$ ist in der Abbildung 2.1.b) dargestellt.

Wir sind jetzt in der Lage, die Gemeinsamkeiten und Unterschiede der Metriken (2.106) und (2.101) zu diskutieren. In beiden Fällen ist bei $uv = 1$ eine Singularität vorhanden, deren kausale Struktur in der Abbildung 2.1.a) erkennbar ist. Ein Vorwärtslichtkegel im Gebiet II trifft immer auf die Singularität, so daß kein physikalisches Objekt aus diesem Gebiet entweichen kann. Die Grenze dieses Gebietes, der Ereignishorizont, liegt bei $u = 0$. Wegen der Existenz einer Singularität und eines Ereignishorizontes bezeichnen wir auch die Metrik (2.95) als (euklidisches) Schwarzes Loch.

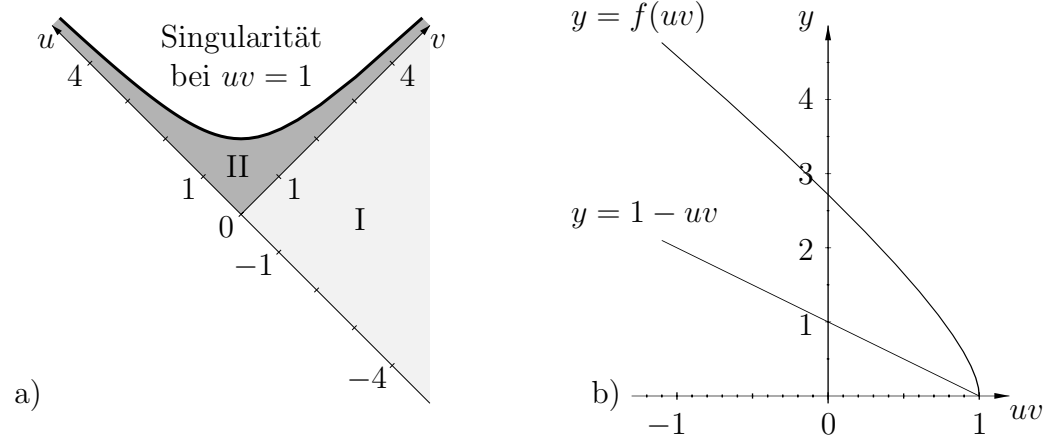


Abbildung 2.1: a) Die kausale Struktur Schwarzer Löcher. Das Gebiet I ist das Äußere, das Gebiet II das Innere des Schwarzen Loches. Jedes physikalische Objekt im Gebiet II trifft unweigerlich auf die Singularität. b) Funktionen, die charakteristisch für das Verhalten eines zweidimensionalen (untere Kurve) bzw. vierdimensionalen (obere Kurve) Schwarzen Loches sind.

In der Abbildung 2.1.b) sind die Funktionen $f(uv)$ und $1 - uv$ abgetragen. Sie bestimmen das Verhalten der Metriken (2.106) und (2.101) im Detail. Trotz deutlicher Unterschiede besteht wegen der qualitativen Gemeinsamkeiten beider Metriken die Hoffnung, daß aus der Analyse zweidimensionaler Schwarzer Löcher Aussagen abgeleitet werden können, die qualitativ auch auf Schwarze Löcher in höheren Dimensionen zutreffen.

Kapitel 3

Die klassische Analyse des geeichten $SL(2, \mathbb{R})/U(1)$ -Wess-Zumino- Novikov-Witten-Modells — der feldtheoretische Fall

Im Abschnitt 2.5 wurde gezeigt, daß die quantentheoretisch exakte Ausintegration des Eichfeldes des $SL(2, \mathbb{R})/U(1)$ -WZNW-Modells gegenwärtig nicht vollständig durchführbar ist. Wir finden deshalb auf diesem Wege keine exakte Wirkung, auf die wir die weiteren Untersuchungen des geeichten $SL(2, \mathbb{R})/U(1)$ -WZNW-Modells glaubwürdig gründen könnten. Wir betrachten deshalb das geeichte $SL(2, \mathbb{R})/U(1)$ -WZNW-Modell zunächst rein *klassisch* als Lagrange-Theorie. Das erlaubt es, das Eichfeld mittels seiner Bewegungsgleichungen zu eliminieren, wie das im Abschnitt 2.4 durchgeführt worden ist. Wir wissen bereits, daß wir dabei zu einer integrablen Theorie gelangen. Wir werden die sich ergebenden Bewegungsgleichungen allgemein lösen und die physikalischen Felder auf kanonische freie Felder abbilden, um die Voraussetzungen für eine spätere Quantisierung des Modells zu schaffen.

3.1 Bewegungsgleichungen und Erhaltungsgrößen

Der Ausgangspunkt aller weiteren Untersuchungen ist die Wirkung (2.58) in Lichtkegelkoordinaten ($\gamma = \sqrt{2\pi/k}$) [28, 29, 30]

$$S[r, t] = \frac{1}{\gamma^2} \int_M (\partial_z r \partial_{\bar{z}} r + \tanh^2 r \partial_z t \partial_{\bar{z}} t) dz d\bar{z}. \quad (3.1)$$

Hieraus folgen die Bewegungsgleichungen für die physikalischen Felder $r(\sigma, \tau)$ und $t(\sigma, \tau)$

$$\begin{aligned} \partial_z \partial_{\bar{z}} r &= \frac{\sinh r}{\cosh^3 r} \partial_z t \partial_{\bar{z}} t \\ \partial_z \partial_{\bar{z}} t &= -\frac{1}{\sinh r \cosh r} (\partial_z r \partial_{\bar{z}} t + \partial_z t \partial_{\bar{z}} r), \end{aligned} \quad (3.2)$$

und die (anti-) chiralen Komponenten des Energie-Impuls-Tensors ergeben sich zu

$$\begin{aligned} T \equiv T_{zz} &= \frac{1}{\gamma^2} ((\partial_z r)^2 + \tanh^2 r (\partial_z t)^2), & T_{z\bar{z}} &= 0, \\ \bar{T} \equiv T_{\bar{z}\bar{z}} &= \frac{1}{\gamma^2} ((\partial_{\bar{z}} r)^2 + \tanh^2 r (\partial_{\bar{z}} t)^2), & T_{\bar{z}z} &= 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Da die Spur des Energie-Impuls-Tensors $2T_{z\bar{z}} + 2T_{\bar{z}z}$ verschwindet, ist die Wirkung (3.1) konform invariant. Später wird sich die Verwendung der komplexen Lichtkegelkoordinaten im Targetraum (2.100) (beachte auch (2.96))

$$u = \sinh r e^{it}, \quad \bar{u} = \sinh r e^{-it} \quad (3.4)$$

als zweckmäßig erweisen. Die Wirkung (3.1) geht damit über in die des euklidischen Schwarzen Loches

$$S[u, \bar{u}] = \frac{1}{2\gamma^2} \int_M \frac{\partial_z u \partial_{\bar{z}} \bar{u} + \partial_{\bar{z}} u \partial_z \bar{u}}{1 + u\bar{u}} dz d\bar{z}. \quad (3.5)$$

Die zugehörigen Bewegungsgleichungen lauten

$$\partial_z \partial_{\bar{z}} u = \bar{u} \frac{\partial_z u \partial_{\bar{z}} u}{1 + u\bar{u}}, \quad \partial_z \partial_{\bar{z}} \bar{u} = u \frac{\partial_z \bar{u} \partial_{\bar{z}} \bar{u}}{1 + u\bar{u}}, \quad (3.6)$$

und die Komponenten des Energie-Impuls-Tensors T und \bar{T} ergeben sich zu

$$T = \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial_z u \partial_z \bar{u}}{1 + u\bar{u}}, \quad \bar{T} = \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial_{\bar{z}} u \partial_{\bar{z}} \bar{u}}{1 + u\bar{u}}. \quad (3.7)$$

Aus den Strömen des ungeeichten WZNW-Modells lassen sich durch Multiplikation mit Wilson-Linien [28, 29, 30] die weiteren erhaltenen Größen

$$V_{\pm} = \frac{1}{\gamma^2} e^{\pm i\nu} (\partial_z r \pm i \tanh r \partial_z t), \quad \bar{V}_{\pm} = \frac{1}{\gamma^2} e^{\mp i\bar{\nu}} (\partial_{\bar{z}} r \mp i \tanh r \partial_{\bar{z}} t) \quad (3.8)$$

gewinnen. Die den Wilson-Linien zugehörigen nichtlokalen¹ Größen ν und $\bar{\nu}$ sind für die Erhaltung von V_{\pm} , \bar{V}_{\pm} hinreichend definiert durch

$$\begin{aligned} \partial_z \nu &= (1 + \tanh^2 r) \partial_z t, & \partial_{\bar{z}} \nu &= (1 - \tanh^2 r) \partial_{\bar{z}} t, \\ \partial_z \bar{\nu} &= (1 - \tanh^2 r) \partial_z t, & \partial_{\bar{z}} \bar{\nu} &= (1 + \tanh^2 r) \partial_{\bar{z}} t. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Die Gleichungen (3.9) sind integrierbar, wenn r und t den Bewegungsgleichungen (3.2) genügen. In Termen der Felder u und \bar{u} ergibt sich für die Erhaltungsgrößen V_{\pm} und \bar{V}_{\pm}

$$\begin{aligned} V_+ &= \frac{1}{\gamma^2} e^{i(\nu-t)} \frac{\partial_z u}{\sqrt{1+u\bar{u}}}, & V_- &= \frac{1}{\gamma^2} e^{-i(\nu-t)} \frac{\partial_z \bar{u}}{\sqrt{1+u\bar{u}}}, \\ \bar{V}_+ &= \frac{1}{\gamma^2} e^{-i(\bar{\nu}-t)} \frac{\partial_{\bar{z}} \bar{u}}{\sqrt{1+u\bar{u}}}, & \bar{V}_- &= \frac{1}{\gamma^2} e^{i(\bar{\nu}-t)} \frac{\partial_{\bar{z}} u}{\sqrt{1+u\bar{u}}}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Überraschenderweise faktorisieren die Komponenten des Energie-Impuls-Tensors (3.3) in Termen der V_{\pm} und \bar{V}_{\pm} (3.8) und haben Ähnlichkeit mit einer Sugawara-Konstruktion [39]

$$T = \gamma^2 V_+ V_-, \quad \bar{T} = \gamma^2 \bar{V}_+ \bar{V}_-. \quad (3.11)$$

Wir werden aber später sehen, daß die erhaltenen Größen (3.8) keine Kac-Moody-Ströme sind. Die Bewegungsgleichungen (3.2) sichern die Erhaltung der Größen T , \bar{T} , V_{\pm} und \bar{V}_{\pm}

$$\partial_{\bar{z}} T = \partial_z \bar{T} = \partial_{\bar{z}} V_{\pm} = \partial_z \bar{V}_{\pm} = 0 \quad (3.12)$$

¹Nichtlokalität bedeutet hier, daß sich die Größen nicht durch $r(\sigma, \tau)$, $t(\sigma, \tau)$ und deren Ableitungen ausdrücken lassen, sie hängen über Integrale auch von den Werten der physikalischen Felder an anderen Raum-Zeit-Punkten ab.

und ihre (Anti-) Chiralität

$$T = T(z), \quad V_{\pm} = V_{\pm}(z), \quad \bar{T} = \bar{T}(\bar{z}), \quad \bar{V}_{\pm} = \bar{V}_{\pm}(\bar{z}). \quad (3.13)$$

Die entsprechenden erhaltenen Ladungen ergeben sich durch Integration

$$\begin{aligned} Q_T &= \int_{-\infty}^{\infty} d\sigma T(\tau + \sigma), & Q_{\pm} &= \int_{-\infty}^{\infty} d\sigma V_{\pm}(\tau + \sigma), \\ \bar{Q}_T &= \int_{-\infty}^{\infty} d\sigma \bar{T}(\tau - \sigma), & \bar{Q}_{\pm} &= \int_{-\infty}^{\infty} d\sigma \bar{V}_{\pm}(\tau - \sigma). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Von den Symmetrien des ungeeichten WZNW-Modells bleibt nach der Eichung die folgende lokale Symmetrie bestehen

$$t \rightarrow t + \delta\varepsilon. \quad (3.15)$$

Die Komponenten des zugehörigen Noether-Stromes sind

$$J_z = \frac{1}{\gamma^2} \tanh^2 r \partial_z t, \quad J_{\bar{z}} = \frac{1}{\gamma^2} \tanh^2 r \partial_{\bar{z}} t, \quad (3.16)$$

und die Kontinuitätsgleichung

$$\partial_{\bar{z}} J_z + \partial_z J_{\bar{z}} = 0 \quad (3.17)$$

ist äquivalent zur zweiten der Bewegungsgleichungen (3.2). Im Unterschied zu den Strömen des ungeeichten WZNW-Modells sind die Komponenten J_z und $J_{\bar{z}}$ nicht chiral oder antichiral.

3.2 Einbettung des geeichten $\text{SL}(2, \mathbb{R})/\text{U}(1)$ -Wess-Zumino-Novikov-Witten-Modells in eine nichtabelsche Toda-Theorie

Obwohl der Schlüssel zur allgemeinen Lösung der Bewegungsgleichungen des $\text{SL}(2, \mathbb{R})/\text{U}(1)$ -Modells üblicherweise das Lax-Paar (2.64) ist, können wir diese Lösung durch Einbettung des Modells in eine nichtabelsche Toda-Theorie [31]

$$S = \frac{1}{\gamma^2} \int_M dz d\bar{z} \left(\partial_z r \partial_{\bar{z}} r + \tanh^2 r \partial_z t \partial_{\bar{z}} t + \partial_z \phi \partial_{\bar{z}} \phi + \cosh 2r e^{2\phi} \right) \quad (3.18)$$

leichter finden. Wie das geeichte $\text{SL}(2, \mathbb{R})/\text{U}(1)$ -WZNW-Modell beschreibt diese Wirkung die Bewegung von Strings in der Metrik eines zweidimensionalen Schwarzen Loches, wenn das zusätzliche Feld ϕ als innerer Freiheitsgrad des Strings interpretiert wird. Die allgemeine Lösung der zugehörigen Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned}\partial_z \partial_{\bar{z}} r &= \frac{\sinh r}{\cosh^3 r} \partial_z t \partial_{\bar{z}} t + \sinh 2r e^{2\phi}, \\ \partial_z \partial_{\bar{z}} t &= -\frac{1}{\sinh r \cosh r} (\partial_z r \partial_{\bar{z}} t + \partial_z t \partial_{\bar{z}} r), \\ \partial_z \partial_{\bar{z}} \phi &= \cosh 2r e^{2\phi}.\end{aligned}\tag{3.19}$$

konnte explizit angegeben werden [31, 32]. Die Autoren von Ref. [31] vermuteten damals, daß die Integrabilität dieses verallgemeinerten Modells eines Schwarzen Loches mit der Eichung eines WZNW-Modelles nach einer *nilpotenten* Untergruppe zusammenhängt, das geeichte $\text{SL}(2, \mathbb{R})/\text{U}(1)$ -WZNW-Modell für sich jedoch nicht integrabel sei. Außerdem war die damit zusammenhängende spezielle Gruppenstruktur bei der Konstruktion der allgemeinen Lösung wichtig. Es war den Autoren von Ref. [31] offenbar nicht bekannt, daß jede beliebige WZNW-Theorie integrabel ist. Vermutlich deshalb wurde von ihnen auch nicht bemerkt, daß die Bewegungsgleichungen (3.19) in dem speziellen Limes

$$\phi(\sigma, \tau) \rightarrow -\infty, \quad \partial_z \phi(\sigma, \tau), \partial_{\bar{z}} \phi(\sigma, \tau) \rightarrow 0\tag{3.20}$$

in die Bewegungsgleichungen (3.2) des $\text{SL}(2, \mathbb{R})/\text{U}(1)$ -Modells übergehen, die allgemeine Lösung der Gleichungen (3.2) also in der allgemeinen Lösung der Gleichungen (3.19) enthalten ist.

3.3 Allgemeine Lösung der Bewegungsgleichungen

Die Anwendung des Limes (3.20) auf die in den Referenzen [31, 32] angegebene allgemeine Lösung der Bewegungsgleichungen (3.19) der nichtabelschen Todatheorie (3.18) führt auf die allgemeine Lösung des $\text{SL}(2, \mathbb{R})/\text{U}(1)$ -Modells

$$\begin{aligned}\sinh^2 r &= X \bar{X}, \\ t &= i(B - \bar{B}) + \frac{i}{2} \ln \frac{X}{\bar{X}}.\end{aligned}\tag{3.21}$$

Wir benutzen hier die Abkürzungen

$$\begin{aligned} X &= A + \frac{\bar{B}'}{\bar{A}'}(1 + A\bar{A}), \\ \bar{X} &= \bar{A} + \frac{B'}{A'}(1 + A\bar{A}). \end{aligned} \quad (3.22)$$

$A = A(z)$, $B = B(z)$, $\bar{A} = \bar{A}(\bar{z})$ und $\bar{B} = \bar{B}(\bar{z})$ und deren Ableitungen parametrisieren als beliebige chirale bzw. antichirale Funktionen die allgemeine Lösung. Es kann durch direktes Einsetzen nachgeprüft werden, daß die Lösung (3.21), (3.22) die Bewegungsgleichungen (3.2) identisch erfüllt. Die Funktionen A , B , \bar{A} und \bar{B} werden aber durch die physikalischen Felder nicht eindeutig festgelegt, weil die Gleichungen (3.21) invariant unter den $\text{GL}(2, \mathbb{C})$ -Transformationen

$$\begin{aligned} A &\rightarrow T[A] = \frac{aA - b}{cA + d} \\ B &\rightarrow T[B] = B + \ln(cA + d) \\ \bar{A} &\rightarrow T[\bar{A}] = \frac{d\bar{A} - c}{b\bar{A} + a} \\ \bar{B} &\rightarrow T[\bar{B}] = \bar{B} + \ln(b\bar{A} + a) \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{GL}(2, \mathbb{C})$$

sind. Diese Invarianz der Lösung wird bei der Bestimmung der Funktionen A , B , \bar{A} und \bar{B} aus den physikalischen Feldern r und t eine Rolle spielen.

Wenn wir die allgemeine Lösung (3.21), (3.22) in die definierenden Gleichungen für ν und $\bar{\nu}$ (3.9) einsetzen, dann können wir diese explizit integrieren, und wir erhalten

$$\begin{aligned} \nu &= t + i(B + \bar{B}) + i \ln(1 + A\bar{A}) - \frac{i}{2} \ln(1 + X\bar{X}) + \nu_0, \\ \bar{\nu} &= t - i(B + \bar{B}) - i \ln(1 + A\bar{A}) + \frac{i}{2} \ln(1 + X\bar{X}) + \bar{\nu}_0. \end{aligned} \quad (3.24)$$

ν und $\bar{\nu}$ sind invariant unter den $\text{GL}(2, \mathbb{C})$ -Transformationen, wenn sich die komplexen Integrationskonstanten ν_0 und $\bar{\nu}_0$ wie folgt transformieren

$$\nu_0 \rightarrow \nu_0 - i \ln(ad + bc), \quad \bar{\nu}_0 \rightarrow \bar{\nu}_0 + i \ln(ad + bc). \quad (3.25)$$

Schließlich lassen sich auch die Erhaltungsgrößen V_{\pm} und \bar{V}_{\pm} lokal durch A , B , \bar{A} und \bar{B} ausdrücken

$$\begin{aligned} V_+ &= \frac{1}{\gamma^2} \left(\frac{B''}{A'} - \frac{B'^2}{A'} - \frac{A'' B'}{A'^2} \right) e^{i\nu_0 - 2B}, & V_- &= \frac{1}{\gamma^2} A' e^{-i\nu_0 + 2B}, \\ \bar{V}_+ &= \frac{1}{\gamma^2} \left(\frac{\bar{B}''}{\bar{A}'} - \frac{\bar{B}'^2}{\bar{A}'} - \frac{\bar{A}'' \bar{B}'}{\bar{A}'^2} \right) e^{i\bar{\nu}_0 - 2\bar{B}}, & \bar{V}_- &= \frac{1}{\gamma^2} \bar{A}' e^{-i\bar{\nu}_0 + 2\bar{B}}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Für den Energie-Impuls-Tensor ergibt sich

$$T = \frac{1}{\gamma^2} \left(B'' - B'^2 - \frac{A''}{A'} B' \right), \quad \bar{T} = \frac{1}{\gamma^2} \left(\bar{B}'' - \bar{B}'^2 - \frac{\bar{A}''}{\bar{A}'} \bar{B}' \right). \quad (3.27)$$

Wir benötigen im weiteren die kanonischen Poissonklammern der physikalischen Felder r und t sowie die der aus ihnen zusammengesetzten Erhaltungsgrößen.

3.4 Die kanonischen Poissonklammern

Die Poissonklammern der physikalischen Felder bestimmen wir aus der Wirkung (3.1), die in den Koordinaten τ , σ benötigt wird

$$S[r, t] = \frac{1}{2\gamma^2} \int_M (\dot{r}^2 - r'^2 + \tanh^2 r \dot{t}^2 - \tanh^2 r t'^2) d\sigma d\tau. \quad (3.28)$$

Daraus erhalten wir die zu r und t gehörenden kanonisch konjugierten Felder

$$\pi_r(\sigma, \tau) = \frac{1}{\gamma^2} \dot{r}, \quad \pi_t(\sigma, \tau) = \frac{1}{\gamma^2} \tanh^2 r \dot{t}. \quad (3.29)$$

Die Poissonklammer zweier Größen P und Q zur Zeit τ wird wie üblich definiert durch

$$\begin{aligned} \{P, Q\} &= \int_{-\infty}^{\infty} d\sigma \left(\frac{\delta P}{\delta r(\sigma, \tau)} \frac{\delta Q}{\delta \pi_r(\sigma, \tau)} - \frac{\delta P}{\delta \pi_r(\sigma, \tau)} \frac{\delta Q}{\delta r(\sigma, \tau)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\delta P}{\delta t(\sigma, \tau)} \frac{\delta Q}{\delta \pi_t(\sigma, \tau)} - \frac{\delta P}{\delta \pi_t(\sigma, \tau)} \frac{\delta Q}{\delta t(\sigma, \tau)} \right). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Dabei sind die Variationen so zu verstehen, daß die Felder Funktionen von σ sind und τ nur ein Parameter ist. Es gilt also beispielsweise

$$\frac{\delta r(\sigma, \tau)}{\delta r(\sigma', \tau)} = \delta(\sigma - \sigma'), \quad \frac{\delta \pi_r(\sigma, \tau)}{\delta \pi_r(\sigma', \tau)} = \delta(\sigma - \sigma'), \quad (3.31)$$

und wir finden die kanonischen Poissonklammern (vgl. (3.29))

$$\begin{aligned}\{r(\sigma, \tau), r(\sigma', \tau)\} &= \{r(\sigma, \tau), t(\sigma', \tau)\} = \{t(\sigma, \tau), t(\sigma', \tau)\} = 0, \\ \{t(\sigma, \tau), \dot{r}(\sigma', \tau)\} &= \{r(\sigma, \tau), r(\sigma', \tau)\} = \{r(\sigma, \tau), r(\sigma', \tau)\} = 0, \\ \{r(\sigma, \tau), \dot{r}(\sigma', \tau)\} &= \gamma^2 \delta(\sigma - \sigma'), \quad \{t(\sigma, \tau), \dot{t}(\sigma', \tau)\} = \gamma^2 \coth^2 r \delta(\sigma - \sigma'), \\ \{\dot{r}(\sigma, \tau), \dot{t}(\sigma', \tau)\} &= 2\gamma^2 \frac{\dot{t}(\sigma, \tau)}{\sinh r(\sigma, \tau) \cosh r(\sigma, \tau)} \delta(\sigma - \sigma').\end{aligned}\quad (3.32)$$

Analog berechnen sich die nicht verschwindenden Poissonklammern der Felder u , \bar{u} , \dot{u} und $\dot{\bar{u}}$

$$\begin{aligned}\{u(\sigma), \dot{\bar{u}}(\sigma')\} &= \{\bar{u}(\sigma), \dot{u}(\sigma')\} = 2\gamma^2(1 + u\bar{u})\delta(\sigma - \sigma'), \\ \{\dot{u}(\sigma), \dot{\bar{u}}(\sigma')\} &= 2\gamma^2(\dot{u}\bar{u} - u\dot{\bar{u}})\delta(\sigma - \sigma').\end{aligned}\quad (3.33)$$

Aus der Wirkung (3.28) erhalten wir das Hamiltonfunktional zur Zeit τ

$$H[r, \pi_r, t, \pi_t] = \frac{1}{2\gamma^2} \int_{-\infty}^{\infty} (\gamma^4 \pi_r^2 + r'^2 + \gamma^4 \coth^2 r \pi_t^2 + \tanh^2 r t'^2) d\sigma. \quad (3.34)$$

Daraus folgt unter Berücksichtigung von $T_{\tau\tau} = T + \bar{T}$ (vgl. (3.3) und (3.14))

$$H = \int_{-\infty}^{\infty} d\sigma T_{\tau\tau}(\sigma, \tau) = Q_T + \bar{Q}_T. \quad (3.35)$$

Die zeitliche Änderung einer beliebigen Größe P läßt sich bekanntlich durch die Poissonklammer

$$\dot{P} = \{P, H\}. \quad (3.36)$$

beschreiben. In diesem Sinne generiert H zeitliche Änderungen. Auf ebensolche Weise erzeugen die Ladungen Q_{\pm} und \bar{Q}_{\pm} (3.14) nichtlokale Symmetrietransformationen

$$\begin{aligned}\delta_{\pm} r(\sigma, \tau) &= \{r(\sigma, \tau), Q_{\pm}\} \delta\varepsilon, & \delta_{\pm} t(\sigma, \tau) &= \{t(\sigma, \tau), Q_{\pm}\} \delta\varepsilon, \\ \bar{\delta}_{\pm} r(\sigma, \tau) &= \{r(\sigma, \tau), \bar{Q}_{\pm}\} \delta\varepsilon, & \bar{\delta}_{\pm} t(\sigma, \tau) &= \{t(\sigma, \tau), \bar{Q}_{\pm}\} \delta\varepsilon,\end{aligned}\quad (3.37)$$

die bei Berücksichtigung partieller Integrationen die Wirkung (3.28) invariant lassen.

Bei der Berechnung der Poissonklammern der Größen V_{\pm} und \bar{V}_{\pm} müssen ν und $\bar{\nu}$ durch die Felder r und t ausgedrückt, die Gleichungen (3.9) also integriert werden. In den Koordinaten σ, τ können diese Gleichungen

$$\begin{aligned}\dot{\nu} &= \dot{t} + \tanh^2 r \, t', & \nu' &= t' + \tanh^2 r \, \dot{t}, \\ \dot{\bar{\nu}} &= \dot{t} - \tanh^2 r \, t', & \bar{\nu}' &= t' - \tanh^2 r \, \dot{t}\end{aligned}\quad (3.38)$$

einfach integriert werden

$$\begin{aligned}\nu(\sigma, \tau) &= t(\sigma, \tau) + \int_{-\infty}^{\sigma} d\sigma' \tanh^2 r(\sigma', \tau) \dot{t}(\sigma', \tau), \\ \bar{\nu}(\sigma, \tau) &= t(\sigma, \tau) - \int_{-\infty}^{\sigma} d\sigma' \tanh^2 r(\sigma', \tau) \dot{t}(\sigma', \tau).\end{aligned}\quad (3.39)$$

Dabei nehmen wir an, daß sich die Felder r und t so verhalten, daß die Integrale existieren. Das ist immer der Fall, wenn sich die Dynamik des Systems in einem endlichen Raumbereich abspielt, d.h. wenn die Felder für $\sigma \rightarrow \infty$ räumlich und zeitlich konstant werden. Wir werden weiter einschränkend an die Felder die Bedingungen

$$\lim_{\sigma \rightarrow \pm\infty} r(\sigma, \tau) = 0, \quad \lim_{\sigma \rightarrow \pm\infty} t(\sigma, \tau) = \text{const} \quad (3.40)$$

stellen. Für u und \bar{u} bedeutet das

$$\lim_{\sigma \rightarrow \pm\infty} u = \lim_{\sigma \rightarrow \pm\infty} \bar{u} = 0. \quad (3.41)$$

Die zeitliche Änderung von ν und $\bar{\nu}$

$$\dot{\nu} = \{\nu, H\}, \quad \dot{\bar{\nu}} = \{\bar{\nu}, H\} \quad (3.42)$$

stimmt mit (3.38) überein, so daß die in (3.39) getroffene Wahl der Integrationskonstanten verträglich mit der Poissonklammerstruktur (3.30) ist. Für die Größen V_{\pm} , \bar{V}_{\pm} , T und \bar{T} ergeben sich daraus die Poissonklammern (die Zeit τ wird im folgenden fortgelassen)

$$\begin{aligned}\{V_{\pm}(\sigma), V_{\pm}(\sigma')\} &= \gamma^2 V_{\pm}(\sigma) V_{\pm}(\sigma') \epsilon(\sigma - \sigma'), \\ \{V_{\pm}(\sigma), V_{\mp}(\sigma')\} &= -\gamma^2 V_{\pm}(\sigma) V_{\mp}(\sigma') \epsilon(\sigma - \sigma') + \gamma^{-2} \delta'(\sigma - \sigma'), \\ \{\bar{V}_{\pm}(\sigma), \bar{V}_{\pm}(\sigma')\} &= -\gamma^2 \bar{V}_{\pm}(\sigma) \bar{V}_{\pm}(\sigma') \epsilon(\sigma - \sigma'), \\ \{\bar{V}_{\pm}(\sigma), \bar{V}_{\mp}(\sigma')\} &= \gamma^2 \bar{V}_{\pm}(\sigma) \bar{V}_{\mp}(\sigma') \epsilon(\sigma - \sigma') - \gamma^{-2} \delta'(\sigma - \sigma'), \\ \{V_{\pm}(\sigma), \bar{V}_{\pm}(\sigma')\} &= \{V_{\pm}(\sigma), \bar{V}_{\mp}(\sigma')\} = 0\end{aligned}\quad (3.43)$$

Solche Poissonklammern wurden bereits in Ref. [28, 29, 30] als Algebra klassischer Parafermionen in geeichten WZNW-Modellen berechnet. Das Verschwinden der Poissonklammern zwischen einer chiralen und einer antichiralen Größe ist typisch, wenn das Modell auf dem unendlich ausgedehnten

Minkowski-Raum betrachtet wird. Daher werden im folgenden solche Poissonklammern nicht mehr explizit angegeben werden.

Die nichtlineare Algebra (3.43) impliziert zusammen mit der Faktorisierung der Komponenten des Energie-Impuls-Tensors (3.11) für V_{\pm} (\bar{V}_{\pm}) das konforme Gewicht $(1, 0)$ ($(0, 1)$)

$$\begin{aligned}\{T(\sigma), V_{\pm}(\sigma')\} &= -(\partial_{\sigma'} V_{\pm}(\sigma')\delta(\sigma - \sigma') - V_{\pm}(\sigma')\delta'(\sigma - \sigma')), \\ \{\bar{T}(\sigma), \bar{V}_{\pm}(\sigma')\} &= (\partial_{\sigma'} \bar{V}_{\pm}(\sigma')\delta(\sigma - \sigma') - \bar{V}_{\pm}(\sigma')\delta'(\sigma - \sigma')).\end{aligned}\quad (3.44)$$

Außerdem folgt aus ihr die Virasoro-Algebra, das heißt, daß T und \bar{T} die konformen Gewichte $(2, 0)$ und $(0, 2)$ haben

$$\begin{aligned}\{T(\sigma), T(\sigma')\} &= -(\partial_{\sigma'} T(\sigma')\delta(\sigma - \sigma') - 2T(\sigma')\delta'(\sigma - \sigma')), \\ \{\bar{T}(\sigma), \bar{T}(\sigma')\} &= (\partial_{\sigma'} \bar{T}(\sigma')\delta(\sigma - \sigma') - 2\bar{T}(\sigma')\delta'(\sigma - \sigma')).\end{aligned}\quad (3.45)$$

An dieser Stelle müssen wir die (anti-) chiralen Funktionen A, B (\bar{A}, \bar{B}) zur Berechnung ihrer Poissonklammern durch die physikalischen Felder r, t, π_r und π_t zum Zeitpunkt τ bestimmen, wenn wir die Poissonklammern nicht erraten wollen, wie das bisher in solchen Situationen üblich war. Das führt uns auf die Untersuchung von Anfangswertproblemen.

3.5 Die Fixierung der allgemeinen Lösung durch Anfangswerte

Die physikalischen Felder r und t seien zu einem bestimmten Zeitpunkt τ_0 durch die Anfangswerte

$$r(\sigma, \tau_0) = r_0(\sigma), \quad t(\sigma, \tau_0) = t_0(\sigma), \quad \dot{r}(\sigma, \tau_0) = r_1(\sigma), \quad \dot{t}(\sigma, \tau_0) = t_1(\sigma) \quad (3.46)$$

gegeben. Wegen der $GL(2, \mathbb{C})$ -Invarianz (3.23) können daraus die Funktionen A, B, \bar{A} und \bar{B} nur bis auf vier unbestimmte komplexe Konstanten eindeutig bestimmt werden.

Das Anfangswertproblem ist definiert durch die homogenen linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$\begin{aligned}y'' - (\partial_z V_- / V_-)y' - \gamma^2 T y &= 0, \\ \bar{y}'' - (\partial_{\bar{z}} \bar{V}_- / \bar{V}_-)\bar{y}' - \gamma^2 \bar{T} \bar{y} &= 0.\end{aligned}\quad (3.47)$$

Wir erhalten sie aus den Erhaltungsgrößen (3.26) durch Eliminieren der Funktionen A und \bar{A} unter Berücksichtigung der Definitionen

$$y = e^B, \quad \bar{y} = e^{\bar{B}}. \quad (3.48)$$

Solche Differentialgleichungen sind in Toda-Theorien [43, 44, 45] unter dem Namen Gelfand-Dikii-Gleichungen bekannt, den wir auch für (3.47) benutzen werden. Die Lösungen dieser Gleichungen sind offenbar (anti-) chirale Funktionen von σ und τ . Aus den Gleichungen (3.26) folgt weiterhin, daß auch

$$y = Ae^B, \quad \bar{y} = \bar{A}e^{\bar{B}} \quad (3.49)$$

die Gelfand-Dikii-Gleichungen erfüllen. Wir bezeichnen diese vier speziellen Lösungen der Gelfand-Dikii-Gleichungen im folgenden mit

$$y_1 = e^B, \quad \bar{y}_1 = e^{\bar{B}}, \quad y_2 = Ae^B, \quad \bar{y}_2 = \bar{A}e^{\bar{B}}. \quad (3.50)$$

Aus ihrer Kenntnis lassen sich die Funktionen A , B , \bar{A} und \bar{B} bestimmen. Daher kann die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichungen (3.21) auch durch die speziellen Lösungen $y_{1,2}(z)$ und $\bar{y}_{1,2}(\bar{z})$ parametrisiert werden. Als besonders symmetrisch erscheint die Lösung der Bewegungsgleichungen (3.6)

$$u = \frac{\bar{y}_1 y_1' + \bar{y}_2 y_2'}{y_1 y_2' - y_1' y_2}, \quad \bar{u} = \frac{y_1 \bar{y}_1' + y_2 \bar{y}_2'}{\bar{y}_1 \bar{y}_2' - \bar{y}_1' \bar{y}_2}, \quad (3.51)$$

Zur Vereinfachung der weiteren Analyse werden wir uns auf die regulären Lösungen beschränken, für die

$$y_1 y_2' - y_1' y_2 \neq 0, \quad \bar{y}_1 \bar{y}_2' - \bar{y}_1' \bar{y}_2 \neq 0 \quad (3.52)$$

für alle endlichen Werte von z und \bar{z} gilt. Die $GL(2, \mathbb{C})$ -Invarianz der allgemeinen Lösung (3.23) wird jetzt

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ y_1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & -b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_2 \\ y_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \bar{y}_2 \\ \bar{y}_1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} d & -c \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{y}_2 \\ \bar{y}_1 \end{pmatrix}, \quad (3.53)$$

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{C}).$$

Natürlich können auch ν , $\bar{\nu}$ (3.24) und die Erhaltungsgrößen V_{\pm} , \bar{V}_{\pm} (3.26) und T , \bar{T} (3.27) durch $y_{1,2}$ und $\bar{y}_{1,2}$ beschrieben werden

$$V_+ = \frac{e^{i\nu_0}}{\gamma^2} \frac{y_1'' y_2' - y_1' y_2''}{(y_1 y_2' - y_1' y_2)^2}, \quad V_- = \frac{e^{-i\nu_0}}{\gamma^2} (y_1 y_2' - y_1' y_2),$$

$$\bar{V}_+ = \frac{e^{-i\bar{\nu}_0}}{\gamma^2} \frac{\bar{y}_1''\bar{y}_2' - \bar{y}_1'\bar{y}_2''}{(\bar{y}_1\bar{y}_2' - \bar{y}_1'\bar{y}_2)^2}, \quad \bar{V}_- = \frac{e^{i\bar{\nu}_0}}{\gamma^2} (\bar{y}_1\bar{y}_2' - \bar{y}_1'\bar{y}_2), \quad (3.54)$$

$$T = \frac{1}{\gamma^2} \frac{y_1''y_2' - y_1'y_2''}{y_1y_2' - y_1'y_2}, \quad \bar{T} = \frac{1}{\gamma^2} \frac{\bar{y}_1''\bar{y}_2' - \bar{y}_1'\bar{y}_2''}{\bar{y}_1\bar{y}_2' - \bar{y}_1'\bar{y}_2}. \quad (3.55)$$

Offenbar führt die Bedingung (3.52) dazu, daß V_+ , \bar{V}_+ , T und \bar{T} nichtsingulär und

$$V_- \neq 0, \quad \bar{V}_- \neq 0 \quad (3.56)$$

bleiben, so daß die Gelfand-Dikii-Gleichungen (3.47) wohldefiniert sind.

Aus der allgemeinen Lösung (3.51) lassen sich die folgenden vier Differentialgleichungen erster Ordnung ableiten

$$\begin{aligned} y_1' &= \frac{\partial_z \bar{u}}{1 + u\bar{u}} (uy_1 - \bar{y}_2), & y_2' &= \frac{\partial_z \bar{u}}{1 + u\bar{u}} (uy_2 + \bar{y}_1), \\ \bar{y}_1' &= \frac{\partial_{\bar{z}} u}{1 + u\bar{u}} (\bar{u}\bar{y}_1 - y_2), & \bar{y}_2' &= \frac{\partial_{\bar{z}} u}{1 + u\bar{u}} (\bar{u}\bar{y}_2 + y_1). \end{aligned} \quad (3.57)$$

Die Gelfand-Dikii-Gleichungen (3.47) können auch aus diesen Differentialgleichungen hergeleitet werden. Während die Gelfand-Dikii-Gleichungen jedoch die Funktionen y_1 , y_2 , \bar{y}_1 und \bar{y}_2 bis auf acht Integrationskonstanten bestimmen, lassen die Gleichungen (3.57) nur vier Integrationskonstanten zu. Das ist genau die Mehrdeutigkeit, die der $GL(2, \mathbb{C})$ -Invarianz (3.53) entspricht.

Die Lösung des oben angesprochenen Anfangswertproblems läßt sich nun auf folgendem Weg erreichen: da die Gleichungen (3.57) für alle σ und τ gelten, setzen wir $\tau = \tau_0$ und ersetzen in ihnen die Funktionen u , \dot{u} , \bar{u} und $\dot{\bar{u}}$ durch ihre Anfangswerte (3.46). Die entstehenden Gleichungen müssen dann nach den Funktionen $y_{1,2}(\tau_0 + \sigma)$ und $\bar{y}_{1,2}(\tau_0 - \sigma)$ aufgelöst werden. Die $GL(2, \mathbb{C})$ -Invarianz wird fixiert durch die Vorgabe von Funktionswerten an einer Stelle $\sigma = \sigma_0$, z.B. bei $\sigma_0 = -\infty$,

$$\begin{aligned} y_k|_{\sigma=-\infty} &= y_k(-\infty) = C_k, & \bar{y}_k|_{\sigma=-\infty} &= \bar{y}_k(\infty) = \bar{C}_k, \\ C_k, \bar{C}_k &\in \mathbb{C}, & k &\in \{1, 2\}. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Diese Nebenbedingungen legen die Lösung der Differentialgleichungen (3.57) bereits eindeutig fest. Um dem (anti-) chiralen Charakter der Funktionen $y_k(z)$ ($\bar{y}_k(\bar{z})$) Rechnung zu tragen, ist es jedoch vorteilhafter, von den Gelfand-Dikii-Gleichungen auszugehen. Damit deren Lösungen verträglich mit den Gleichungen (3.57) sind, müssen zusätzliche Nebenbedingungen an die

Ableitungen der Funktionen $y_k(z)$ und $\bar{y}_k(\bar{z})$ gestellt werden, die aus den Gleichungen (3.57) berechnet werden (vgl. auch (3.41))

$$\begin{aligned} u|_{\sigma=-\infty} = \bar{u}|_{\sigma=-\infty} = 0 &\implies \\ y'_1|_{\sigma \rightarrow -\infty} &\sim -\partial_z \bar{u} \bar{C}_2, & y'_2|_{\sigma \rightarrow -\infty} &\sim \partial_z \bar{u} \bar{C}_1, \\ \bar{y}'_1|_{\sigma \rightarrow -\infty} &\sim -\partial_{\bar{z}} u C_2, & \bar{y}'_2|_{\sigma \rightarrow -\infty} &\sim \partial_{\bar{z}} u C_1. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Nun legen auch die Gelfand-Dikii-Gleichungen y_k und \bar{y}_k eindeutig fest. Die Funktionen $A(z)$, $B(z)$, $\bar{A}(\bar{z})$ werden aus (3.50) bestimmt, und sie liefern schließlich die Lösung des Anfangswertproblems in Form der allgemeinen Lösung (3.21), (3.22).

Auch die Integrationskonstanten ν_0 und $\bar{\nu}_0$ von (3.24) lassen sich mittels der Nebenbedingungen (3.58) und (3.59) durch C_k und \bar{C}_k ausdrücken: Dazu betrachten wir das asymptotische Verhalten der Größen V_{\pm} und \bar{V}_{\pm} . Aus den Gleichungen (3.10) ergeben sich unter Berücksichtigung von (3.41) und (3.39)

$$\begin{aligned} V_+|_{\sigma \rightarrow -\infty} &\sim \frac{1}{\gamma^2} \partial_z u, & V_-|_{\sigma \rightarrow -\infty} &\sim \frac{1}{\gamma^2} \partial_z \bar{u}, \\ \bar{V}_+|_{\sigma \rightarrow -\infty} &\sim \frac{1}{\gamma^2} \partial_{\bar{z}} \bar{u}, & \bar{V}_-|_{\sigma \rightarrow -\infty} &\sim \frac{1}{\gamma^2} \partial_{\bar{z}} u. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Aus den Gleichungen (3.54) und den Nebenbedingungen (3.58), (3.59) erhalten wir dagegen

$$\begin{aligned} V_+|_{\sigma \rightarrow -\infty} &\sim \frac{e^{i\nu_0}}{\gamma^2(C_1 \bar{C}_1 + C_2 \bar{C}_2)} \partial_z u, & V_-|_{\sigma \rightarrow -\infty} &\sim \frac{e^{-i\nu_0}}{\gamma^2} (C_1 \bar{C}_1 + C_2 \bar{C}_2) \partial_z \bar{u}, \\ \bar{V}_+|_{\sigma \rightarrow -\infty} &\sim \frac{e^{-i\bar{\nu}_0}}{\gamma^2(C_1 \bar{C}_1 + C_2 \bar{C}_2)} \partial_{\bar{z}} \bar{u}, & \bar{V}_-|_{\sigma \rightarrow -\infty} &\sim \frac{e^{i\bar{\nu}_0}}{\gamma^2} (C_1 \bar{C}_1 + C_2 \bar{C}_2) \partial_{\bar{z}} u. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Durch Vergleich dieser beiden Resultate finden wir schließlich für die gesuchten Integrationskonstanten

$$\nu_0 = -\bar{\nu}_0 = -i \ln(C_1 \bar{C}_1 + C_2 \bar{C}_2). \quad (3.62)$$

3.6 Die Poissonklammern der (anti-) chiralen Felder

Im Abschnitt 3.5 haben wir gesehen, daß aus vorgegebenen Anfangsbedingungen und nach der Fixierung der $GL(2, \mathbb{C})$ -Invarianz die (anti-) chiralen

Funktionen $A(z)$, $B(z)$, $\bar{A}(\bar{z})$ und $\bar{B}(\bar{z})$ bzw. $y_{1,2}(z)$ und $\bar{y}_{1,2}(\bar{z})$ eindeutig bestimmt werden können. Damit werden auch die Poissonklammern dieser Funktionen durch die Vorgabe der Poissonklammern für die physikalischen Felder eindeutig festgelegt. Diese Poissonklammern werden dabei von der Fixierung der $GL(2, \mathbb{C})$ -Invarianz abhängen. Die Nebenbedingungen (3.58) und (3.59) sind invariant gegenüber Translationen $\sigma \rightarrow \sigma + \delta\sigma$. Deshalb werden auch die Poissonklammern translationsinvariant sein.

Wir betrachten zunächst die Funktionen $y_k(z)$ und $\bar{y}_k(\bar{z})$ ($k \in \{1, 2\}$). Um die Definition der Poissonklammern (3.30) auf diese Funktionen anwenden zu können, müssen wir wissen, wie sich die Variationen $\delta y_k(z)$ und $\delta \bar{y}_k(\bar{z})$ aus den Variationen der physikalischen Felder und deren Impulse $\delta u(\sigma, \tau)$, $\delta \bar{u}(\sigma, \tau)$, $\delta \pi_u(\sigma, \tau)$ und $\delta \pi_{\bar{u}}(\sigma, \tau)$ ergeben. Dazu variieren wir die Gelfand-Dikii-Gleichungen (3.47) und die zugehörigen Nebenbedingungen (3.58), (3.59) und erhalten die inhomogenen Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$\begin{aligned} \delta y_k'' - (\partial_z V_- / V_-) \delta y_k' - \gamma^2 T \delta y_k &= \delta(\partial_z V_- / V_-) y_k' + \gamma^2 \delta T y_k, \\ \delta \bar{y}_k'' - (\partial_{\bar{z}} \bar{V}_- / \bar{V}_-) \delta \bar{y}_k' - \gamma^2 \bar{T} \delta \bar{y}_k &= \delta(\partial_{\bar{z}} \bar{V}_- / \bar{V}_-) \bar{y}_k' + \gamma^2 \delta \bar{T} \bar{y}_k \end{aligned} \quad (3.63)$$

mit den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} \delta y_k|_{\sigma \rightarrow -\infty} &= \delta y_k(-\infty) = \delta C_k = 0, \\ \delta \bar{y}_k|_{\sigma \rightarrow -\infty} &= \delta \bar{y}_k(\infty) = \delta \bar{C}_k = 0, \end{aligned} \quad (3.64)$$

$$\begin{aligned} \delta y_1'|_{\sigma \rightarrow -\infty} &\sim -\partial_z \delta \bar{u} \bar{C}_2, & \delta y_2'|_{\sigma \rightarrow -\infty} &\sim \partial_z \delta \bar{u} \bar{C}_1, \\ \delta \bar{y}_1'|_{\sigma \rightarrow -\infty} &\sim -\partial_{\bar{z}} \delta u C_2, & \delta \bar{y}_2'|_{\sigma \rightarrow -\infty} &\sim \partial_{\bar{z}} \delta u C_1. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Zur Vereinfachung der Diskussion nehmen wir an, daß die Variationen $\delta u(\sigma, \tau)$ und $\delta \bar{u}(\sigma, \tau)$ nur in einem endlichen, aber sonst beliebigen Intervall von Null verschieden sind. Das ist keine wesentliche Einschränkung, weil jeder endliche Punkt σ in einem solchen Intervall liegt. Die Nebenbedingungen (3.65) vereinfachen sich dann zu

$$\delta y_1'|_{\sigma \rightarrow -\infty} = \delta y_2'|_{\sigma \rightarrow -\infty} = \delta \bar{y}_1'|_{\sigma \rightarrow -\infty} = \delta \bar{y}_2'|_{\sigma \rightarrow -\infty} = 0. \quad (3.66)$$

Da die zu (3.63) gehörigen homogenen Differentialgleichungen mit den Gelfand-Dikii-Gleichungen (3.47) übereinstimmen, läßt sich aus der Kenntnis zweier Basislösungen mit Hilfe der Methode der Variation der Konstanten die Lösung der inhomogenen Differentialgleichungen konstruieren. Wählen

wir als Basislösungen der Gelfand-Dikii-Gleichungen die Funktionen y_k bzw. \bar{y}_k selbst, dann erhalten wir schließlich als Lösung von (3.63) unter den Nebenbedingungen (3.64) und (3.66)

$$\begin{aligned}\delta y_k(z) &= \int_{-\infty}^z dz' \Omega(z, z') \left(\delta(\partial V_-/V_-)(z') y'_k(z') + \gamma^2 \delta T(z') y_k(z') \right), \\ \Omega(z, z') &\equiv \frac{y_1(z') y_2(z) - y_2(z') y_1(z)}{y_1(z') y'_2(z') - y_2(z') y'_1(z')}, \\ \delta \bar{y}_k(\bar{z}) &= \int_{-\infty}^{\bar{z}} d\bar{z}' \bar{\Omega}(\bar{z}, \bar{z}') \left(\delta(\partial \bar{V}_-/\bar{V}_-)(\bar{z}') \bar{y}'_k(\bar{z}') + \gamma^2 \delta \bar{T}(\bar{z}') \bar{y}_k(\bar{z}') \right), \\ \bar{\Omega}(\bar{z}, \bar{z}') &\equiv \frac{\bar{y}_1(\bar{z}') \bar{y}_2(\bar{z}) - \bar{y}_2(\bar{z}') \bar{y}_1(\bar{z})}{\bar{y}_1(\bar{z}') \bar{y}'_2(\bar{z}') - \bar{y}_2(\bar{z}') \bar{y}'_1(\bar{z}')}.\end{aligned}\tag{3.67}$$

Aus der Definition der Poissonklammern (3.30) ergibt sich damit

$$\begin{aligned}\{y_k(z), y_l(\tilde{z})\} &= \int_{-\infty}^z dz' \int_{-\infty}^{\tilde{z}} d\tilde{z}' \Omega(z, z') \Omega(\tilde{z}, \tilde{z}') \times \\ &\quad \times \left(\{(\partial V_-/V_-)(z'), (\partial V_-/V_-)(\tilde{z}')\} y'_k(z') y'_l(\tilde{z}') + \right. \\ &\quad + \gamma^2 \{T(z'), (\partial V_-/V_-)(\tilde{z}')\} y_k(z') y'_l(\tilde{z}') + \\ &\quad + \gamma^2 \{(\partial V_-/V_-)(z'), T(\tilde{z}')\} y'_k(z') y_l(\tilde{z}') + \\ &\quad \left. + \gamma^4 \{T(z'), T(\tilde{z}')\} y_k(z') y_l(\tilde{z}') \right)\end{aligned}\tag{3.68}$$

und analoge Ausdrücke für die anderen Poissonklammern. Die unter den Integralen stehenden Poissonklammern lassen sich direkt auf die Poissonklammern der physikalischen Felder (3.32) bzw. (3.33) zurückführen. Werden diese benutzt, so lassen sich die Integrale wegen der auftretenden δ -Distributionen auswerten, und wir erhalten

$$\begin{aligned}\{y_k(z), y_l(\tilde{z})\} &= \frac{\gamma^2}{2} (y_k(z) y_l(\tilde{z}) - y_l(z) y_k(\tilde{z})) \epsilon(z - \tilde{z}), \\ \{\bar{y}_k(\bar{z}), \bar{y}_l(\tilde{\bar{z}})\} &= \frac{\gamma^2}{2} (\bar{y}_k(\bar{z}) \bar{y}_l(\tilde{\bar{z}}) - \bar{y}_l(\bar{z}) \bar{y}_k(\tilde{\bar{z}})) \epsilon(\bar{z} - \tilde{\bar{z}}), \\ \{y_k(z), \bar{y}_l(\bar{z})\} &= 0.\end{aligned}\tag{3.69}$$

$\epsilon(z)$ bezeichnet hier die Vorzeichenfunktion

$$\epsilon(z) \equiv \begin{cases} -1 & \text{für } z < 0, \\ 0 & \text{für } z = 0, \\ 1 & \text{für } z > 0. \end{cases}\tag{3.70}$$

Für die Felder $A(z)$, $B(z)$, $\bar{A}(\bar{z})$ und $\bar{B}(\bar{z})$ ergeben sich daraus mittels (3.50) die Poissonklammern

$$\begin{aligned}
\{A(z), A(z')\} &= \frac{\gamma^2}{2} (A(z) - A(z'))^2 \epsilon(z - z'), \\
\{A(z), B(z')\} &= \frac{\gamma^2}{2} (A(z) - A(z')) \epsilon(z - z'), \\
\{B(z), B(z')\} &= 0, \\
\{\bar{A}(\bar{z}), \bar{A}(\bar{z}')\} &= \frac{\gamma^2}{2} (\bar{A}(\bar{z}) - \bar{A}(\bar{z}'))^2 \epsilon(\bar{z} - \bar{z}'), \\
\{\bar{A}(\bar{z}), \bar{B}(\bar{z}')\} &= \frac{\gamma^2}{2} (\bar{A}(\bar{z}) - \bar{A}(\bar{z}')) \epsilon(\bar{z} - \bar{z}'), \\
\{\bar{B}(\bar{z}), \bar{B}(\bar{z}')\} &= 0, \\
\{A(z), \bar{A}(\bar{z})\} &= \{A(z), \bar{B}(\bar{z})\} = \{B(z), \bar{A}(\bar{z})\} = \{B(z), \bar{B}(\bar{z})\} = 0.
\end{aligned} \tag{3.71}$$

Da wir für eine spätere Quantisierung des $SL(2, \mathbb{R})/U(1)$ -WZNW-Modells eine kanonische Transformation der physikalischen Felder $r(\sigma, \tau)$ und $t(\sigma, \tau)$ auf freie Felder $\psi_{1,2}(\sigma, \tau)$ suchen, fragen wir im folgenden, wie die Funktionen A , B , \bar{A} und \bar{B} bzw. y_k und \bar{y}_k durch die (anti-) chiralen Komponenten freier Felder beschrieben werden können, so daß sich die Poissonklammern (3.71) bzw. (3.69) ergeben.

3.7 Transformation der physikalischen Felder auf freie Felder

Wir leiten zuerst eine Darstellung der freien Felder $\psi_1(\sigma, \tau)$ und $\psi_2(\sigma, \tau)$ als Funktionen der $y_k(z)$ und $\bar{y}_k(\bar{z})$ ab. Die freien Felder sollen die Wirkung

$$S_{\text{frei}}[\psi_1, \psi_2] = \frac{1}{2} \int d\sigma d\tau \left(\dot{\psi}_1^2 + \dot{\psi}_2^2 - \psi_1'^2 - \psi_2'^2 \right) \tag{3.72}$$

haben. Die zugehörigen Komponenten des Energie-Impuls-Tensors

$$T(z) = (\partial_z \psi_1)^2 + (\partial_z \psi_2)^2, \quad \bar{T}(\bar{z}) = (\partial_{\bar{z}} \psi_1)^2 + (\partial_{\bar{z}} \psi_2)^2 \tag{3.73}$$

müssen sich aus (3.55) mittels der gesuchten kanonischen Transformation ergeben. Alle bisher aufgetretenen Größen ließen sich algebraisch durch y_k , \bar{y}_k und deren Ableitungen ausdrücken. Deshalb liegt die Vermutung nahe, daß

auch die freien Felder ψ_1 und ψ_2 algebraisch durch diese Funktionen gegeben sind. Im Anhang G wird dieser Zusammenhang durch die Identifizierung der Energie-Impuls-Tensoren (3.55) und (3.73) explizit hergeleitet. Dazu ist es zweckmäßig, die komplexwertigen Felder

$$\psi = \psi_1 + i\psi_2, \quad \bar{\psi} = \psi_1 - i\psi_2 \quad (3.74)$$

zu definieren. In ihnen faktorisieren die Komponenten des Energie-Impuls-Tensors

$$T(z) = \partial_z \psi \partial_z \bar{\psi}, \quad \bar{T}(z) = \partial_{\bar{z}} \psi \partial_{\bar{z}} \bar{\psi}. \quad (3.75)$$

Werden die freien Felder ψ_k ($k = 1, 2$) in (anti-) chirale Komponenten $\phi_k(z)$ und $\bar{\phi}_k(\bar{z})$

$$\psi_k(\sigma, \tau) = \phi_k(z) + \bar{\phi}_k(\bar{z}) \quad (3.76)$$

zerlegt, so ergibt sich eine entsprechende Zerlegung von ψ und $\bar{\psi}$

$$\psi(\sigma, \tau) = \phi(z) + \bar{\chi}(\bar{z}), \quad \bar{\psi}(\sigma, \tau) = \chi(z) + \bar{\phi}(\bar{z}), \quad (3.77)$$

wobei

$$\begin{aligned} \phi(z) &= \phi_1(z) + i\phi_2(z), & \bar{\phi}(\bar{z}) &= \bar{\phi}_1(\bar{z}) - i\bar{\phi}_2(\bar{z}), \\ \chi(z) &= \phi_1(z) - i\phi_2(z), & \bar{\chi}(\bar{z}) &= \bar{\phi}_1(\bar{z}) + i\bar{\phi}_2(\bar{z}). \end{aligned} \quad (3.78)$$

Wir finden schließlich (vgl. (G.42), (G.45))

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{1}{\gamma C} \left(\ln \frac{\alpha y'_1 + \beta y'_2}{y_1 y'_2 - y'_1 y_2} + D \right), & \chi &= \frac{C}{\gamma} \ln (\alpha y_1 + \beta y_2), \\ \bar{\phi} &= \frac{1}{\gamma \bar{C}} \left(\ln \frac{\bar{\alpha} \bar{y}'_1 + \bar{\beta} \bar{y}'_2}{\bar{y}_1 \bar{y}'_2 - \bar{y}'_1 \bar{y}_2} + \bar{D} \right), & \bar{\chi} &= \frac{\bar{C}}{\gamma} \ln (\bar{\alpha} \bar{y}_1 + \bar{\beta} \bar{y}_2). \end{aligned} \quad (3.79)$$

Hier sind $\alpha, \beta, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, C, \bar{C}, D$ und \bar{D} beliebige komplexe Konstanten, die die möglichen Frei-Feld-Darstellungen parametrisieren. Daß die Ausdrücke (3.79) tatsächlich (anti-) chirale Komponenten freier Felder sind, stellt sich heraus, wenn ihre Poissonklammern mittels der Poissonklammern der y_k und \bar{y}_k (3.69) unter der Voraussetzung berechnet werden, daß die Konstanten $\alpha, \beta, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, C, \bar{C}, D$ und \bar{D} selbst nicht von den physikalischen Feldern $u(\sigma, \tau)$ und $\bar{u}(\tau, \sigma)$ abhängen. Wir finden dann

$$\{\phi(z), \chi(z')\} = -\frac{1}{2}\epsilon(z - z'),$$

$$\begin{aligned}
\{\bar{\phi}(\bar{z}), \bar{\chi}(\bar{z}')\} &= -\frac{1}{2}\epsilon(\bar{z} - \bar{z}'), \\
\{\phi(z), \phi(z')\} &= \{\chi(z), \chi(z')\} = 0, \\
\{\bar{\phi}(\bar{z}), \bar{\phi}(\bar{z}')\} &= \{\bar{\chi}(\bar{z}), \bar{\chi}(\bar{z}')\} = 0.
\end{aligned} \tag{3.80}$$

Das sind aber genau die gesuchten Poissonklammern, die sich aus (3.78) ergeben, wenn für ϕ_k und $\bar{\phi}_k$ die Poissonklammern der (anti-) chiralen Komponenten freier Felder

$$\begin{aligned}
\{\phi_k(z), \phi_l(z')\} &= -\frac{1}{4}\epsilon(z - z')\delta_{kl}, \\
\{\bar{\phi}_k(\bar{z}), \bar{\phi}_l(\bar{z}')\} &= -\frac{1}{4}\epsilon(\bar{z} - \bar{z}')\delta_{kl}, \\
\{\phi_k(z), \bar{\phi}_l(\bar{z})\} &= 0
\end{aligned} \tag{3.81}$$

gewählt werden.

Wir wollen jetzt fragen, ob die Konstanten α , β , $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, C , \bar{C} , D und \bar{D} noch frei gewählt werden können oder ob sie gewissen Bedingungen unterliegen. Da die Darstellung (3.79) aus dem Energie-Impuls-Tensor abgeleitet wurde, spielen dabei Transformationen, die den Energie-Impuls-Tensor invariant lassen, eine besondere Rolle. Die komplexen Konstanten C und \bar{C} spiegeln die Invarianz der Komponenten des Energie-Impuls-Tensors

$$T(z) = \partial_z \phi \partial_z \chi, \quad \bar{T}(\bar{z}) = \partial_{\bar{z}} \bar{\chi} \partial_{\bar{z}} \bar{\phi} \tag{3.82}$$

unter den Transformationen

$$\phi \rightarrow e\phi, \quad \chi \rightarrow \frac{\chi}{e}, \quad \bar{\phi} \rightarrow \bar{e}\bar{\phi}, \quad \bar{\chi} \rightarrow \frac{\bar{\chi}}{\bar{e}}. \tag{3.83}$$

wider. Da ψ_1 und ψ_2 reellwertige Felder sind, muß die Transformation (3.83) infolge (3.78) die Bedingungen

$$|\phi| = |\chi| \quad \text{und} \quad |\bar{\phi}| = |\bar{\chi}| \tag{3.84}$$

respektieren. Die Zahlen e und \bar{e} reduzieren sich so auf Phasenfaktoren

$$e = e^{i\delta}, \quad \bar{e} = e^{-i\bar{\delta}}, \quad \delta, \bar{\delta} \in \mathbb{R}. \tag{3.85}$$

Dann können die Transformationen (3.83) als $\text{SO}(2, \mathbb{R})$ -Rotationen

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \delta & -\sin \delta \\ \sin \delta & \cos \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} \bar{\phi}_1 \\ \bar{\phi}_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \bar{\delta} & -\sin \bar{\delta} \\ \sin \bar{\delta} & \cos \bar{\delta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\phi}_1 \\ \bar{\phi}_2 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{3.86}$$

aufgefaßt werden. Für $\delta = \bar{\delta}$ ergibt sich die Transformation

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \delta & -\sin \delta \\ \sin \delta & \cos \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \quad (3.87)$$

die die Wirkung (3.72) invariant läßt. Für $\delta \neq \bar{\delta}$ unterliegen die chiralen und antichiralen Komponenten der Felder ψ_1 und ψ_2 offenbar verschiedenen Rotationen. Die entsprechende Transformation ist folglich eine nichtlokale² Verallgemeinerung der Symmetrie (3.87). Die Phasenfaktoren parametrisieren also die verschiedenen Möglichkeiten, die freien Felder ψ_1 und ψ_2 aus gegebenen chiralen und antichiralen Komponenten freier Felder zusammenzusetzen. Wir treffen hier eine Auswahl und setzen

$$C, \bar{C} \in \mathbb{R}^+. \quad (3.88)$$

Da der Logarithmus in (3.79) nur bis auf ganzzahlige Vielfache von $2\pi i$ eindeutig bestimmt ist, bedeutet (3.88), daß die folgenden Funktionswerte der Felder zu identifizieren sind:

$$\phi \equiv \phi + \frac{2\pi i}{\gamma C}, \quad \chi \equiv \chi + \frac{2\pi i C}{\gamma}, \quad \bar{\phi} \equiv \bar{\phi} + \frac{2\pi i}{\gamma \bar{C}}, \quad \bar{\chi} \equiv \bar{\chi} + \frac{2\pi i \bar{C}}{\gamma}. \quad (3.89)$$

In reelle Komponenten (3.78) zerlegt und unter Berücksichtigung der gesetzten Bedingung (3.88), bedeutet das

$$\phi_2 \equiv \phi_2 + \frac{2\pi}{\gamma C}, \quad \phi_2 \equiv \phi_2 + \frac{2\pi C}{\gamma}, \quad \bar{\phi}_2 \equiv \bar{\phi}_2 + \frac{2\pi}{\gamma \bar{C}}, \quad \bar{\phi}_2 \equiv \bar{\phi}_2 + \frac{2\pi \bar{C}}{\gamma}. \quad (3.90)$$

Deshalb müssen folgende Mengen gleich sein

$$\frac{2\pi}{\gamma C} \mathbb{Z} = \frac{2\pi C}{\gamma} \mathbb{Z}, \quad \frac{2\pi}{\gamma \bar{C}} \mathbb{Z} = \frac{2\pi \bar{C}}{\gamma} \mathbb{Z}. \quad (3.91)$$

Unter der Bedingung (3.88) folgt daraus

$$C = \bar{C} = 1, \quad \phi_2 \equiv \phi_2 + \frac{2\pi}{\gamma}, \quad \bar{\phi}_2 \equiv \bar{\phi}_2 + \frac{2\pi}{\gamma}. \quad (3.92)$$

²Die chiralen und antichiralen Komponenten hängen nichtlokal von den freien Feldern ab, so daß die Transformation (3.86) in Termen der freien Felder nichtlokal ist. Nur im Fall $\delta = \bar{\delta}$ reduziert sich diese auf die lokale Transformation (3.87).

ϕ_2 und $\bar{\phi}_2$ nehmen also Werte auf einem Kreis mit dem Radius $1/\gamma$ an.

Eine weitere Transformation läßt die Komponenten des Energie-Impuls-Tensors invariant

$$\phi \rightarrow \phi + f, \quad \chi \rightarrow \chi + g, \quad \bar{\phi} \rightarrow \bar{\phi} + \bar{f}, \quad \bar{\chi} \rightarrow \bar{\chi} + \bar{g} \quad (3.93)$$

mit

$$f, g, \bar{f}, \bar{g} = \text{const.} \quad (3.94)$$

Sie entspricht teils einer Verschiebung der freien Felder

$$\psi \rightarrow \psi + f + \bar{g}, \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} + \bar{f} + g, \quad (3.95)$$

teils der Nichteindeutigkeit der Aufteilung der freien Felder in chirale und antichirale Komponenten. Beide Möglichkeiten lassen sich durch Randbedingungen an die Komponenten der freien Felder fixieren

$$\phi|_{\sigma=-\infty} = \chi|_{\sigma=-\infty} = \bar{\phi}|_{\sigma=-\infty} = \bar{\chi}|_{\sigma=-\infty} = 0. \quad (3.96)$$

Aus den Beziehungen (3.79) erkennen wir, daß die Felder ϕ , $\bar{\phi}$, χ und $\bar{\chi}$ invariant unter den $\text{GL}(2, \mathbb{C})$ -Transformationen (3.53) sind, wenn sich die Konstanten α , $\bar{\alpha}$, β , $\bar{\beta}$, D und \bar{D} gemäß

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} &\rightarrow \frac{1}{ad+bc} \begin{pmatrix} a & -c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \quad D \rightarrow D + \ln(ad+bc), \\ \begin{pmatrix} \bar{\alpha} \\ \bar{\beta} \end{pmatrix} &\rightarrow \frac{1}{ad+bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\alpha} \\ \bar{\beta} \end{pmatrix}, \quad \bar{D} \rightarrow \bar{D} + \ln(ad+bc) \end{aligned} \quad (3.97)$$

transformieren. Weitere Einschränkungen dieser Konstanten ergeben sich daher aus der Fixierung der $\text{GL}(2, \mathbb{C})$ -Invarianz der Funktionen $y_k(z)$ und $\bar{y}_k(\bar{z})$ (3.58), (3.59). Wie im Anhang H gezeigt wird, führt das zusammen mit den Randbedingungen (3.96) und der Zerlegung der Felder ϕ , χ , $\bar{\phi}$ und $\bar{\chi}$ in reelle Felder (3.78) auf folgende Beziehungen (vergl. (H.15) und (H.12))

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\bar{C}_1 - C_2 e^{-i\kappa}}{C_1 \bar{C}_1 + C_2 \bar{C}_2}, \quad \beta = \frac{\bar{C}_2 + C_1 e^{-i\kappa}}{C_1 \bar{C}_1 + C_2 \bar{C}_2}, \quad D = \ln(C_1 \bar{C}_1 + C_2 \bar{C}_2) + i\kappa \\ \bar{\alpha} &= \frac{C_1 - \bar{C}_2 e^{i\bar{\kappa}}}{C_1 \bar{C}_1 + C_2 \bar{C}_2}, \quad \bar{\beta} = \frac{C_2 + \bar{C}_1 e^{i\bar{\kappa}}}{C_1 \bar{C}_1 + C_2 \bar{C}_2}, \quad \bar{D} = \ln(C_1 \bar{C}_1 + C_2 \bar{C}_2) - i\bar{\kappa}. \end{aligned} \quad (3.98)$$

Hierbei sind κ und $\bar{\kappa}$ beliebige reelle Zahlen, die keiner Einschränkung unterliegen. Vermutlich läßt sich diesen Parametern, ähnlich zu δ und $\bar{\delta}$, auch eine Symmetrie der Wirkung (3.72) zuordnen.

Spezielle Werte der Konstanten C_k, \bar{C}_k, κ und $\bar{\kappa}$ geben besonders einfache Resultate für $\alpha, \bar{\alpha}, \beta, \bar{\beta}, D$ und \bar{D} , beispielsweise für

$$C_1 = \bar{C}_1 = 1, \quad C_2 = \bar{C}_2 = e^{2\pi i/3}, \quad \kappa = -\bar{\kappa} = \frac{\pi}{3}, \quad (3.99)$$

erhalten wir

$$\alpha = \bar{\alpha} = 1, \quad \beta = \bar{\beta} = D = \bar{D} = 0, \quad (3.100)$$

und der lokale Zusammenhang (3.79) zwischen den freien Feldern und den Lösungen der Gelfand-Dikii-Gleichungen $y_{1,2}$ und $\bar{y}_{1,2}$ vereinfacht sich zu

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{1}{\gamma} \ln \frac{y_1'}{y_1 y_2' - y_1' y_2}, & \chi &= \frac{1}{\gamma} \ln y_1, \\ \bar{\phi} &= \frac{1}{\gamma} \ln \frac{\bar{y}_1'}{\bar{y}_1 \bar{y}_2' - \bar{y}_1' \bar{y}_2}, & \bar{\chi} &= \frac{1}{\gamma} \ln \bar{y}_1. \end{aligned} \quad (3.101)$$

Im weiteren werden wir diese spezielle Darstellung voraussetzen. Wir können (3.101) nach den Funktionen $y_k(z)$ und $\bar{y}_k(\bar{z})$ auflösen, wobei die auftretenden Integrationskonstanten durch (3.99) und (3.58) bestimmt werden, und erhalten die Frei-Feld-Darstellung

$$\begin{aligned} y_1(z) &= \exp(\gamma \chi(z)), \\ y_2(z) &= \exp(\gamma \chi(z)) \left(\int_{-\infty}^z dz' \gamma \chi'(z') \exp(-\gamma \phi(z') - \gamma \chi(z')) + e^{2\pi i/3} \right), \\ \bar{y}_1(\bar{z}) &= \exp(\gamma \bar{\chi}(\bar{z})), \\ \bar{y}_2(\bar{z}) &= \exp(\gamma \bar{\chi}(\bar{z})) \left(\int_{+\infty}^{\bar{z}} d\bar{z}' \gamma \bar{\chi}'(\bar{z}') \exp(-\gamma \bar{\phi}(\bar{z}') - \gamma \bar{\chi}(\bar{z}')) + e^{2\pi i/3} \right). \end{aligned} \quad (3.102)$$

Es läßt sich leicht nachprüfen, daß sich aus den Poissonklammern der freien Felder (3.80) tatsächlich die Poissonklammern der Funktionen $y_k(z)$ und $\bar{y}_k(\bar{z})$ (3.69) ergeben. Damit ist die gesuchte kanonische Transformation auf freie Felder für den feldtheoretischen Fall gefunden.

3.8 Bäcklund-Transformation des geeichten $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})/\mathrm{U}(1)$ -WZNW-Modells auf freie Felder

Am Ende dieser Untersuchungen sei noch die der Frei-Feld-Darstellung (3.102) entsprechende Bäcklund-Transformation angegeben. Wir erhalten sie, indem wir (3.77) mittels (3.101) umschreiben

$$\begin{aligned}\psi(\sigma, \tau) &= \frac{1}{\gamma} \ln \frac{y'_1(z)}{y_1(z)y'_2(z) - y'_1(z)y_2(z)} + \frac{1}{\gamma} \ln \bar{y}_1(\bar{z}), \\ \bar{\psi}(\sigma, \tau) &= \frac{1}{\gamma} \ln \frac{\bar{y}'_1(\bar{z})}{\bar{y}_1(\bar{z})\bar{y}'_2(\bar{z}) - \bar{y}'_1(\bar{z})\bar{y}_2(\bar{z})} + \frac{1}{\gamma} \ln y_1(z)\end{aligned}\quad (3.103)$$

und die Gleichungen (3.51) benutzen, sämtliche erste Ableitungen der Felder u , \bar{u} , ψ und $\bar{\psi}$ berechnen und schließlich die Funktionen $y_k(z)$, $\bar{y}_k(\bar{z})$ und deren Ableitungen eliminieren. Das Ergebnis lautet

$$\begin{aligned}\partial_z u &= \frac{\gamma}{2} e^{\gamma\psi} \left(P + \sqrt{P^2 - 4Q} \right) \partial_z \psi, \quad \partial_{\bar{z}} u = \frac{\gamma}{2} e^{\gamma\psi} \left(P - \sqrt{P^2 - 4Q} \right) \partial_{\bar{z}} \psi, \\ \partial_z \bar{u} &= \frac{\gamma}{2} e^{\gamma\bar{\psi}} \left(P - \sqrt{P^2 - 4Q} \right) \partial_z \bar{\psi}, \quad \partial_{\bar{z}} \bar{u} = \frac{\gamma}{2} e^{\gamma\bar{\psi}} \left(P + \sqrt{P^2 - 4Q} \right) \partial_{\bar{z}} \bar{\psi}.\end{aligned}\quad (3.104)$$

P und Q sind durch

$$P(u, \bar{u}, \psi, \bar{\psi}) \equiv u e^{-\gamma\psi} + \bar{u} e^{-\gamma\bar{\psi}} + e^{-\gamma\psi - \gamma\bar{\psi}}, \quad Q(u, \bar{u}, \psi, \bar{\psi}) \equiv (1 + u\bar{u}) e^{-\gamma\psi - \gamma\bar{\psi}} \quad (3.105)$$

gegeben. Die aus (3.104) folgenden Integrabilitätsbedingungen für die Felder u und \bar{u}

$$\begin{aligned}0 &= \partial_{\bar{z}} \partial_z u - \partial_z \partial_{\bar{z}} u = \gamma e^{\gamma\psi} \sqrt{P^2 - 4Q} \partial_z \partial_{\bar{z}} \psi \\ 0 &= \partial_{\bar{z}} \partial_z \bar{u} - \partial_z \partial_{\bar{z}} \bar{u} = -\gamma e^{\gamma\bar{\psi}} \sqrt{P^2 - 4Q} \partial_z \partial_{\bar{z}} \bar{\psi}\end{aligned}\quad (3.106)$$

führen auf die Bewegungsgleichung der freien Felder

$$\partial_z \partial_{\bar{z}} \psi = 0, \quad \partial_z \partial_{\bar{z}} \bar{\psi} = 0, \quad (3.107)$$

während die Integrabilitätsbedingungen für die freien Felder

$$\begin{aligned}0 &= \partial_{\bar{z}} \partial_z \psi - \partial_z \partial_{\bar{z}} \psi = -\frac{1}{1 + u\bar{u}} \sqrt{P^2 - 4Q} \left(\partial_z \partial_{\bar{z}} u - \frac{\bar{u} \partial_z u \partial_{\bar{z}} u}{1 + u\bar{u}} \right), \\ 0 &= \partial_{\bar{z}} \partial_z \bar{\psi} - \partial_z \partial_{\bar{z}} \bar{\psi} = -\frac{1}{1 + u\bar{u}} \sqrt{P^2 - 4Q} \left(\partial_z \partial_{\bar{z}} \bar{u} - \frac{u \partial_z \bar{u} \partial_{\bar{z}} \bar{u}}{1 + u\bar{u}} \right),\end{aligned}\quad (3.108)$$

die Bewegungsgleichungen (3.6) der Felder u und \bar{u} ergeben.

Damit haben wir die allgemeine Lösung und die Struktur des geeichten $SL(2, \mathbb{R})/U(1)$ -WZNW-Modells im feldtheoretischen Fall für die klassische Theorie umfassend beschrieben. Integrabilität war für dieses Modell zwar oft vermutet worden [28, 29, 30, 15], der Beweis ist aber im Rahmen dieser Arbeit erstmals gelungen (siehe Abschnitt 2.3). Auch wurden die symplektischen Strukturen der Theorie im Unterschied zum üblichen Vorgehen (vgl. beispielsweise [32]) nicht vermutet, sondern mittels der Lösungen der Gelfand-Dikii-Gleichungen berechnet.

Die explizite kanonische Transformation der physikalischen Felder auf freie Felder würde den Versuch einer Quantisierung der Theorie ermöglichen. Wir werden aber im folgenden auf den für uns interessanteren Fall periodischer Randbedingungen eingehen, der zugleich die Bewegung eines geschlossenen Strings im Hintergrund einer Schwarzen-Loch-Metrik beschreibt. Wir werden hier eine andere Nullmodenstruktur vorfinden.

Kapitel 4

Die klassische Analyse des periodischen geeichten $SL(2, \mathbb{R})/U(1)$ -Wess-Zumino-Novikov-Witten-Modells

4.1 Generelle Unterschiede zum feldtheoretischen Fall

Wir hatten zu Beginn der Arbeit erwähnt, daß durch das geeichte $SL(2, \mathbb{R})/U(1)$ -WZNW-Modell die Bewegung eines Strings in der gekrümmten Metrik eines euklidischen Schwarzen Loches (2.95) beschrieben werden kann. Soll der String eine endliche Länge haben und geschlossen sein, dann hat seine Weltfläche die Topologie eines Zylinders, und die raumartigen Teilmannigfaltigkeiten der Weltfläche sind topologisch einem Kreis äquivalent. Wir parametrisieren den Kreis so, daß die Koordinaten σ , die sich um ein ganzzahliges Vielfaches von 2π unterscheiden, denselben Punkt des Kreises bezeichnen

$$\sigma \equiv \sigma + 2\pi. \quad (4.1)$$

Die Felder des Modells $r(\sigma, \tau)$, $t(\sigma, \tau)$ oder $u(\sigma, \tau)$, $\bar{u}(\sigma, \tau)$ repräsentieren die Position des Strings zu einem bestimmten Zeitpunkt τ der Eigenzeit. Sie müssen auf dem Kreis eindeutig definiert sein und unterliegen deshalb den Randbedingungen

$$r(\sigma + 2\pi, \tau) = r(\sigma, \tau), \quad t(\sigma + 2\pi, \tau) = t(\sigma, \tau) + 2\pi w, \quad w \in \mathbb{Z}, \quad (4.2)$$

bzw.

$$u(\sigma + 2\pi, \tau) = u(\sigma, \tau), \quad \bar{u}(\sigma + 2\pi, \tau) = \bar{u}(\sigma, \tau). \quad (4.3)$$

Diese Randbedingungen ersetzen die asymptotischen Randbedingungen (3.40) des Kapitels 3. w ist eine Windungszahl, die beschreibt, wie oft der String den Koordinatenursprung $r = 0$ umläuft. Weil während der Bewegung Teile des Strings den Koordinatenursprung überqueren können, kann sich die Windungszahl dynamisch ändern. Da sich das wegen des diskreten Wertebereichs von w nicht ohne weiteres durch das Variationsprinzip der minimalen Wirkung beschreiben läßt, werden wir uns im folgenden einfachheitshalber auf die dynamischen Sektoren beschränken, in denen sich die Windungszahl nicht ändert.

Wegen der Periodizität (4.2), (4.3) lassen sich die Felder des Modells in Fourierreihen nach Moden entwickeln

$$r(\sigma, \tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r_n(\tau) e^{in\sigma}, \quad (4.4)$$

$$t(\sigma, \tau) = w\sigma + \sum_{n=-\infty}^{\infty} t_n(\tau) e^{in\sigma}. \quad (4.5)$$

Ist x insbesondere eine chirale Größe $x(\sigma, \tau) = x(\tau + \sigma)$ (Analoges gilt für antichirale Größen) mit der Quasiperiodizität

$$x(\sigma + 2\pi, \tau) = x(\sigma, \tau) + \Delta x, \quad (4.6)$$

so gilt

$$x(\sigma, \tau) = \Delta x \frac{\tau + \sigma}{2\pi} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{in(\tau + \sigma)}. \quad (4.7)$$

Die Poissonklammern der $x(\sigma, \tau)$ lassen sich dann vollständig in solche der Fourierkoeffizienten x_n und Δx übertragen. Die Moden

$$r_n(\tau), \quad w\sigma, \quad t_n(\tau), \quad x_n e^{in(\tau + \sigma)} \quad \text{und} \quad \frac{\Delta x}{2\pi}(\tau + \sigma) \quad (4.8)$$

werden in Nullmoden

$$\begin{aligned} r_{\text{null}}(\sigma, \tau) &\equiv r_0(\tau), \\ x_{\text{null}}(\sigma, \tau) &\equiv x_0 + \frac{\Delta x}{2\pi}(\tau + \sigma) \end{aligned} \quad (4.9)$$

und Oszillatormoden

$$\begin{aligned} r_{\text{osz}}(\sigma, \tau) &\equiv \sum_{n=1}^{\infty} (r_n(\tau)e^{in\sigma} + r_{-n}(\tau)e^{-in\sigma}) \\ x_{\text{osz}}(\sigma, \tau) &\equiv \sum_{n=1}^{\infty} (x_n e^{in(\tau+\sigma)} + x_{-n} e^{-in(\tau+\sigma)}) \end{aligned} \quad (4.10)$$

unterschieden. Wegen der Nichtlinearität der Bewegungsgleichungen werden die Poissonklammern zwischen Null- und Oszillatormoden im allgemeinen nicht verschwinden, im Gegensatz zu denen freier Felder.

Im folgenden werden die Ergebnisse des Kapitels 3 auf den periodischen Fall übertragen, wobei besonders die Unterschiede herausgearbeitet werden.

4.2 Die Bewegungsgleichungen und die Erhaltungsgrößen des periodischen Modells

Die Wirkung des periodischen geeichten $\text{SL}(2, \mathbb{R})/\text{U}(1)$ -WZNW-Modells ist ebenfalls durch (3.1) bzw. (3.5) gegeben. Die Unterschiede liegen einzig in der Periodizität der Felder (4.2), (4.3) im neuen Integrationsbereich

$$M = \mathbb{R} \times S^1, \quad \text{d.h.} \quad 0 \leq \sigma \leq 2\pi, \quad -\infty < \tau < \infty. \quad (4.11)$$

Folglich sind auch die Bewegungsgleichungen und der Energie-Impuls-Tensor identisch zum nichtperiodischen Fall. Die Erhaltungsgrößen $V_{\pm}(z)$ und $\bar{V}_{\pm}(\bar{z})$ zeigen dagegen eine Besonderheit. Die Definitionsgleichungen für ν und $\bar{\nu}$ (3.9) oder (3.38) stellen nicht sicher, daß diese Größen periodisch modulo 2π sind. Vielmehr folgt aus ihnen

$$\begin{aligned} \nu(\sigma + 2\pi, \tau) - \nu(\sigma, \tau) &= \int_{\sigma}^{\sigma+2\pi} \nu'(\sigma', \tau) d\sigma' = 2\pi w + \int_0^{2\pi} \tanh^2 r \dot{t} d\sigma', \\ \bar{\nu}(\sigma + 2\pi, \tau) - \bar{\nu}(\sigma, \tau) &= \int_{\sigma}^{\sigma+2\pi} \bar{\nu}'(\sigma', \tau) d\sigma' = 2\pi w - \int_0^{2\pi} \tanh^2 r \dot{t} d\sigma'. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Definieren wir

$$\Delta\mu = -\Delta\bar{\mu} \equiv \int_0^{2\pi} \tanh^2 r \dot{t} d\sigma' = \int_0^{2\pi} \pi_t(\sigma', \tau) d\sigma' = P_t(\tau), \quad (4.13)$$

so kann das Periodizitätsverhalten von V_{\pm} und \bar{V}_{\pm} beschrieben werden durch

$$V_{\pm}(z + 2\pi) = e^{\pm i\Delta\mu} V_{\pm}(z), \quad \bar{V}_{\pm}(\bar{z} - 2\pi) = e^{\mp i\Delta\bar{\mu}} \bar{V}_{\pm}(\bar{z}). \quad (4.14)$$

Wegen (4.13) ist $\Delta\mu = -\Delta\bar{\mu}$ der Gesamtimpuls des Feldes t und, weil die Wirkung (3.1) nur von den Ableitungen von t abhängt, eine Konstante der Bewegung. Da im allgemeinen $\Delta\mu = -\Delta\bar{\mu}$ aber kein ganzzahliges Vielfaches von 2π sein wird, sind $V_{\pm}(z)$ und $\bar{V}_{\pm}(\bar{z})$ auf dem Kreis nicht eindeutig! Wir definieren daher auf dem Kreis die eindeutigen Erhaltungsgrößen

$$W_{\pm} \equiv e^{\mp i\Delta\mu z/(2\pi)} V_{\pm}, \quad \bar{W}_{\pm} \equiv e^{\pm i\Delta\bar{\mu}\bar{z}/(2\pi)} \bar{V}_{\pm}, \quad (4.15)$$

für die

$$W_{\pm}(z + 2\pi) = W_{\pm}(z), \quad \bar{W}_{\pm}(\bar{z} - 2\pi) = \bar{W}_{\pm}(\bar{z}) \quad (4.16)$$

gilt. Die Ladungen Q_{\pm} und \bar{Q}_{\pm} werden jetzt W_{\pm} und \bar{W}_{\pm} zugeordnet

$$Q_{\pm} = \int_0^{2\pi} d\sigma W_{\pm}(\tau + \sigma), \quad \bar{Q}_{\pm} = \int_0^{2\pi} d\sigma \bar{W}_{\pm}(\tau - \sigma). \quad (4.17)$$

Diese hängen wegen der Periodizität der Integranden von einer Verschiebung der Integrationsgrenzen $(0, 2\pi) \rightarrow (\sigma_0, \sigma_0 + 2\pi)$ nicht mehr ab, wie es für physikalische Größen erforderlich ist.

4.3 Die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichungen im periodischen Fall

Da die Bewegungsgleichungen (3.2), (3.6) gegenüber dem feldtheoretischen Modell keine Veränderung erfahren, ist auch deren allgemeine Lösung identisch. Die Gleichungen des Abschnittes 3.3 können daher ohne Modifikationen übernommen werden. Jetzt sind jedoch die (anti-) chiralen Funktionen $A(z)$, $B(z)$, $\bar{A}(\bar{z})$ und $\bar{B}(\bar{z})$ nicht mehr eindeutig. Damit die physikalischen Felder r und t bzw. u und \bar{u} den Periodizitätsbedingungen (4.2), (4.3) genügen, ist es hinreichend, wenn die (anti-) chiralen Funktionen bis auf $GL(2, \mathbb{C})$ -Transformationen periodisch sind, d.h.

$$A(z + 2\pi) = T[A(z)] = \frac{aA(z) - b}{cA(z) + d}$$

$$\begin{aligned}
B(z + 2\pi) &= T[B(z)] = B(z) + \ln(cA(z) + d) \\
\bar{A}(\bar{z} - 2\pi) &= T[\bar{A}(\bar{z})] = \frac{d\bar{A}(\bar{z}) - c}{b\bar{A}(\bar{z}) + a} \\
\bar{B}(\bar{z} - 2\pi) &= T[\bar{B}(\bar{z})] = \bar{B}(\bar{z}) + \ln(b\bar{A}(\bar{z}) + a) \\
&\quad \begin{pmatrix} a & -b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{GL}(2, \mathbb{C}).
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Die integrierten Ausdrücke für ν und $\bar{\nu}$ (3.24) können aber unverändert übernommen werden. Aus den Randbedingungen (4.18) erhalten wir

$$\begin{aligned}
\nu(\sigma + 2\pi, \tau) &= \nu(\sigma, \tau) + 2\pi w + i \ln(ad + bc) \\
\bar{\nu}(\sigma + 2\pi, \tau) &= \bar{\nu}(\sigma, \tau) + 2\pi w - i \ln(ad + bc)
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Vergleichen wir das mit (4.12) und (4.13), so erhalten wir explizit

$$\Delta\mu = -\Delta\bar{\mu} = i \ln(ad + bc). \tag{4.20}$$

Da $\Delta\mu$ und $\Delta\bar{\mu}$ gemäß Definition (4.13) reell sind, beschränkt (4.20) die $\text{GL}(2, \mathbb{C})$ -Transformationen in (4.18) auf solche mit einer unimodularen Determinante

$$|ad + bc| = 1. \tag{4.21}$$

Die Erhaltungsgrößen $V_{\pm}(z)$, $\bar{V}_{\pm}(\bar{z})$ und der Energie-Impuls-Tensor lassen sich auf die gleiche Weise wie im feldtheoretischen Fall (3.26), (3.27) durch $A(z)$, $B(z)$, $\bar{A}(\bar{z})$ und $\bar{B}(\bar{z})$ ausdrücken. Mit (4.20) ergibt sich für $W_{\pm}(z)$ und $\bar{W}(\bar{z})$ (4.15)

$$\begin{aligned}
W_+ &= \frac{(ad + bc)^{z/(2\pi)}}{\gamma^2} \left(\frac{B''}{A'} - \frac{B'^2}{A'} - \frac{A''B'}{A'^2} \right) e^{i\nu_0 - 2B}, \\
W_- &= \frac{(ad + bc)^{-z/(2\pi)}}{\gamma^2} A' e^{-i\nu_0 + 2B}, \\
\bar{W}_+ &= \frac{(ad + bc)^{\bar{z}/(2\pi)}}{\gamma^2} \left(\frac{\bar{B}''}{\bar{A}'} - \frac{\bar{B}'^2}{\bar{A}'} - \frac{\bar{A}''\bar{B}'}{\bar{A}'^2} \right) e^{i\bar{\nu}_0 - 2\bar{B}}, \\
\bar{W}_- &= \frac{(ad + bc)^{-\bar{z}/(2\pi)}}{\gamma^2} \bar{A}' e^{-i\bar{\nu}_0 + 2\bar{B}}.
\end{aligned} \tag{4.22}$$

4.4 Die kanonischen Poissonklammern im periodischen Fall

Die Berechnung der Poissonklammern der physikalischen Felder r , t bzw. u und \bar{u} erfolgt analog zum Abschnitt 3.4 unter Beachtung des Integrationsbereiches (4.11) und der Periodizitätsbedingungen (4.2), (4.3). Dann sind auch die Impulse (3.29) periodisch

$$\pi_r(\sigma + 2\pi, \tau) = \pi_r(\sigma, \tau), \quad \pi_t(\sigma + 2\pi, \tau) = \pi_t(\sigma, \tau). \quad (4.23)$$

Die Poissonklammer zweier Größen P und Q berechnet sich wie zuvor nach Gleichung (3.30), jedoch mit neuem Integrationsgebiet

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\sigma \rightarrow \int_0^{2\pi} d\sigma, \quad (4.24)$$

und es muß, z.B. in (3.32), (3.33) oder (3.45), die gewöhnliche δ -Funktion durch eine periodische ersetzt werden

$$\delta(\sigma - \sigma') \rightarrow \delta_{2\pi}(\sigma - \sigma') \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\sigma - \sigma' + 2\pi n). \quad (4.25)$$

Auch im Hamiltonfunktional (3.34) muß nur die Ersetzung (4.24) vorgenommen werden, und das gleiche gilt für den Zusammenhang des Hamiltonfunktionals H mit den Ladungen Q_T , $Q_{\bar{T}}$ (3.35). Dabei bleiben (3.36) und (3.37) unverändert. Eine Schwierigkeit tritt jedoch bei der Berechnung der Poissonklammern der V_{\pm} und \bar{V}_{\pm} bzw. W_{\pm} und \bar{W}_{\pm} auf. Es scheint keinen (3.39) entsprechenden integrierten Ausdruck für ν und $\bar{\nu}$ zu geben¹. Deshalb kann an dieser Stelle die Algebra der Größen V_{\pm} , \bar{V}_{\pm} , W_{\pm} und \bar{W}_{\pm} nicht abgeleitet werden.

Das trifft aber nicht für die in den Feldern r , t , u und \bar{u} lokalen Koeffizienten der Gelfand-Dikii-Gleichungen $\partial_z \ln V_-(z)$, $T(z)$, $\partial_{\bar{z}} \ln \bar{V}_-(\bar{z})$ und

¹Der naheliegende Ausdruck $\nu(\sigma, \tau) = t(\sigma, \tau) + (1/2) \int_0^{2\pi} d\sigma' \epsilon_{2\pi}(\sigma - \sigma') \dot{t} \tanh^2 r$ reproduziert zwar ν' von (3.38), aber nicht $\dot{\nu}$. Außerdem ist er nicht unabhängig von der Wahl des Nullpunktes auf dem Kreis wegen der Nichtperiodizität des Integranden in σ' . Geeigneter scheint $\nu(\sigma, \tau) = t(\sigma, \tau) + (1/2) \int_0^{2\pi} d\sigma' (\epsilon_{2\pi}(\sigma - \sigma') + f(\sigma', \tau)) \dot{t} \tanh^2 r$ mit $f(\sigma + 2\pi, \tau) = f(\sigma, \tau) + 2$ zu sein, das ν' und $\dot{\nu}$ unter der Bedingung reproduziert, daß $\int_0^{2\pi} d\sigma (\dot{f} \dot{t} - f' t') \tanh^2 r = 0$. Es ist jedoch schwierig, einen Ausdruck für $f(\sigma, \tau)$ zu finden.

$\bar{T}(\bar{z})$ zu, deren Poissonklammern wir aus dem feldtheoretischen Fall mit der Ersetzung (4.25) ableiten können. Wir geben diese zum späteren Gebrauch an

$$\begin{aligned}
\{\partial_z \ln V_-(\sigma), \partial_z \ln V_-(\sigma')\} &= -2\gamma^2 \delta'_{2\pi}(\sigma - \sigma'), \\
\{T(\sigma), \partial_z \ln V_-(\sigma')\} &= -\partial_z^2 \ln V_-(\sigma') \delta_{2\pi}(\sigma - \sigma') + \\
&\quad + \partial_z \ln V_-(\sigma') \delta'_{2\pi}(\sigma - \sigma') - \delta''_{2\pi}(\sigma - \sigma'), \\
\{\partial_{\bar{z}} \ln \bar{V}_-(\sigma), \partial_{\bar{z}} \ln \bar{V}_-(\sigma')\} &= 2\gamma^2 \delta'_{2\pi}(\sigma - \sigma'), \\
\{\bar{T}(\sigma), \partial_{\bar{z}} \ln \bar{V}_-(\sigma')\} &= -\partial_{\bar{z}}^2 \ln \bar{V}_-(\sigma') \delta_{2\pi}(\sigma - \sigma') - \\
&\quad - \partial_{\bar{z}} \ln \bar{V}_-(\sigma') \delta'_{2\pi}(\sigma - \sigma') - \delta''_{2\pi}(\sigma - \sigma'), \\
\{\partial_z \ln V_-(\sigma), \partial_{\bar{z}} \ln \bar{V}_-(\sigma')\} &= 0, \\
\{\partial_z \ln V_-(\sigma), \bar{T}(\sigma')\} &= 0, \\
\{T(\sigma), \partial_{\bar{z}} \ln \bar{V}_-(\sigma')\} &= 0.
\end{aligned} \tag{4.26}$$

4.5 Die Fixierung der allgemeinen Lösung durch Anfangswerte im periodischen Fall

Wir werden in diesem Abschnitt die Funktionen $y_{1,2}(z)$ und $\bar{y}_{1,2}(\bar{z})$ aus vorgegebenen physikalischen Feldern $r(\sigma, \tau)$, $t(\sigma, \tau)$ bzw. $u(\sigma, \tau)$, $\bar{u}(\sigma, \tau)$ und der Festlegung der $GL(2, \mathbb{C})$ -Invarianz bestimmen. Die Lösung dieses Anfangswertproblems verläuft ähnlich zu dem im feldtheoretischen Fall. Insbesondere bleiben die Gelfand-Dikii-Gleichungen (3.47), ihre Lösungen $y_1(z)$, $y_2(z)$, $\bar{y}_1(\bar{z})$ und $\bar{y}_2(\bar{z})$ (3.50), die Parametrisierung der allgemeinen Lösung (3.51), der Zusammenhang mit den (anti-) chiralen Erhaltungsgrößen $V_{\pm}(z)$ und $\bar{V}_{\pm}(\bar{z})$ (3.54) sowie die Differentialgleichungen erster Ordnung (3.57) unverändert. Ein Unterschied besteht in der Fixierung der $GL(2, \mathbb{C})$ -Invarianz. Grundsätzlich ist es möglich, diese wie im nichtperiodischen Fall durch die Vorgabe von Funktionswerten an einer Stelle $\sigma = \sigma_0$ (vgl. (3.58)) zu fixieren. Auf dem Kreis existiert aber kein translationsinvarianter „Punkt“ $-\infty$, so daß eine solche Fixierung stets die Translationsinvarianz bräche. Deshalb werden wir im folgenden die $GL(2, \mathbb{C})$ -Invarianz auf andere Weise fixieren.

Die Koeffizienten der Gelfand-Dikii-Gleichungen (3.47) sind periodische Funktionen von z bzw. \bar{z} . Deshalb sind mit $y_k(z)$ auch die Funktionen $y_k(z + 2\pi)$ Lösungen dieser Gleichungen (Analoges gilt natürlich für die antichiralen Funktionen), und sie lassen sich als Linearkombinationen der $y_k(z)$ darstel-

len². Aus den Randbedingungen (4.18) erhalten wir für die Funktionen y_k und \bar{y}_k (3.50)

$$\begin{pmatrix} y_2(z+2\pi) \\ y_1(z+2\pi) \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} y_2(z) \\ y_1(z) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \bar{y}_2(\bar{z}-2\pi) \\ \bar{y}_1(\bar{z}-2\pi) \end{pmatrix} = \bar{M}^{-1} \begin{pmatrix} \bar{y}_2(\bar{z}) \\ \bar{y}_1(\bar{z}) \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix} a & -b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{GL}(2, \mathbb{C}), \quad \bar{M}^{-1} = \begin{pmatrix} d & -c \\ b & a \end{pmatrix} \in \text{GL}(2, \mathbb{C}) \quad (4.27)$$

Unter einer $\text{GL}(2, \mathbb{C})$ -Transformation

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ y_1 \end{pmatrix} \rightarrow N \begin{pmatrix} y_2 \\ y_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \bar{y}_2 \\ \bar{y}_1 \end{pmatrix} \rightarrow \bar{N} \begin{pmatrix} \bar{y}_2 \\ \bar{y}_1 \end{pmatrix}, \quad N, \bar{N} \in \text{GL}(2, \mathbb{C}) \quad (4.28)$$

ändern sich M und \bar{M} in

$$M \rightarrow NMN^{-1}, \quad \bar{M} \rightarrow \bar{N}\bar{M}\bar{N}^{-1}, \quad (4.29)$$

und sie können in den Fällen

$$(1) \quad (\text{tr} M)^2 \neq 4 \det M, \quad (2) \quad M = a\mathbb{I}_2 \quad (4.30)$$

auf Diagonalform

$$M = \begin{pmatrix} e^{-\alpha'} & 0 \\ 0 & e^{\alpha'} \end{pmatrix}, \quad \bar{M} = \begin{pmatrix} e^{-\alpha'} & 0 \\ 0 & e^{\alpha'} \end{pmatrix} \quad (4.31)$$

gebracht werden. Die nichtdiagonalisierbaren Fälle

$$(\text{tr} M)^2 = 4 \det M \text{ mit } M \neq a\mathbb{I}_2$$

werden wir hier nicht betrachten, da sie relativ zu den diagonalisierbaren Fällen eine Menge vom Maß Null sind. Die Periodizitätsbedingungen (4.27) vereinfachen sich dann auf

$$\begin{aligned} y_1(z+2\pi) &= e^{\alpha'} y_1(z), & y_2(z+2\pi) &= e^{-\alpha'} y_2(z), \\ \bar{y}_1(\bar{z}-2\pi) &= e^{-\alpha'} \bar{y}_1(\bar{z}), & \bar{y}_2(\bar{z}-2\pi) &= e^{\alpha'} \bar{y}_2(\bar{z}). \end{aligned} \quad (4.32)$$

²Wir nehmen hier wieder die Bedingung (3.56) an, die sicherstellt, daß die Funktionen $y_1(z)$ und $y_2(z)$ an jeder Stelle des Kreises linear unabhängig sind.

Diese speziellen Periodizitätsbedingungen lassen von den $GL(2, \mathbb{C})$ -Transformationen (4.28) nur noch Skalierungen mit zwei freien Parametern a' und d' zu

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ y_1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a'y_2 \\ d'y_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \bar{y}_2 \\ \bar{y}_1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} d'\bar{y}_2 \\ a'\bar{y}_1 \end{pmatrix}. \quad (4.33)$$

Damit haben wir zwei der vier Integrationskonstanten der Gleichungen (3.57) implizit fixiert.

Die Quotienten

$$\begin{aligned} \eta_{1,2}(z) &\equiv \frac{y'_{1,2}(z)}{y_{1,2}(z)}, & \bar{\eta}_{1,2}(\bar{z}) &\equiv \frac{\bar{y}'_{1,2}(\bar{z})}{\bar{y}_{1,2}(\bar{z})}, \\ Q_{1,2}(z, z') &\equiv \frac{y_{1,2}(z)}{y_{1,2}(z')}, & \bar{Q}_{1,2}(\bar{z}, \bar{z}') &\equiv \frac{\bar{y}_{1,2}(\bar{z})}{\bar{y}_{1,2}(\bar{z}')} \end{aligned} \quad (4.34)$$

bleiben invariant unter den Skalierungen (4.33), sie sind daher durch die Bedingung (4.32) eindeutig bestimmt. Die Funktionen $\eta_{1,2}(z)$ und $\bar{\eta}_{1,2}(\bar{z})$ sind periodisch

$$\eta_{1,2}(z + 2\pi) = \eta_{1,2}(z), \quad \bar{\eta}_{1,2}(\bar{z} + 2\pi) = \bar{\eta}_{1,2}(\bar{z}). \quad (4.35)$$

Wir ersetzen mittels (4.34) in (3.57) die abgeleiteten Funktionen $y'_{1,2}(z)$ und $\bar{y}'_{1,2}(\bar{z})$ durch $\eta_{1,2}(z)$ und $\bar{\eta}_{1,2}(\bar{z})$. Dann sind auch die Funktionen

$$\begin{aligned} \kappa(\sigma, \tau) &\equiv \ln y_1(z) - \ln \bar{y}_2(\bar{z}) = \ln \frac{\partial_z \bar{u}}{u \partial_z \bar{u} - \eta_1(1 + u\bar{u})}, \\ \bar{\kappa}(\sigma, \tau) &\equiv \ln \bar{y}_1(\bar{z}) - \ln y_2(z) = \ln \frac{\partial_{\bar{z}} u}{\bar{u} \partial_{\bar{z}} u - \bar{\eta}_1(1 + u\bar{u})} \end{aligned} \quad (4.36)$$

eindeutig bestimmt. Wir können dieselben Funktionen auch durch $\eta_2(z)$ und $\bar{\eta}_2(\bar{z})$ ausdrücken. Aus den dadurch erhaltenen Identitäten ergeben sich die folgenden Zusammenhänge zwischen $\eta_{1,2}(z)$ und $\bar{\eta}_{1,2}(\bar{z})$

$$\eta_2(z) = \frac{\partial_z u - \bar{\eta}_1 u}{\bar{u} \partial_{\bar{z}} u - \bar{\eta}_1(1 + u\bar{u})} \partial_z \bar{u}, \quad \bar{\eta}_2(\bar{z}) = \frac{\partial_z \bar{u} - \eta_1 \bar{u}}{u \partial_z \bar{u} - \eta_1(1 + u\bar{u})} \partial_{\bar{z}} u. \quad (4.37)$$

Die Funktionen $\eta_{1,2}(z)$ und $\bar{\eta}_{1,2}(\bar{z})$ können unter Beachtung der (Anti-) Chiralität integriert werden zu

$$\ln y_{1,2}(\tau + \sigma) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \eta_{1,2}(\tau + \sigma') h(\sigma - \sigma') d\sigma' + \frac{\tau + \sigma}{2\pi} \alpha_{1,2} + D_{1,2},$$

$$\ln \bar{y}_{1,2}(\tau - \sigma) = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \bar{\eta}_{1,2}(\tau - \sigma') h(\sigma - \sigma') d\sigma' + \frac{\tau - \sigma}{2\pi} \bar{\alpha}_{1,2} + \bar{D}_{1,2}. \quad (4.38)$$

Dabei sind $h(\sigma)$ die periodische Sägezahnfunktion

$$h(\sigma) = \epsilon_{2\pi}(\sigma) - \frac{\sigma}{\pi} = 2n + 1 - \frac{\sigma}{\pi} \quad \text{für } 2\pi n < \sigma < 2\pi(n+1), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (4.39)$$

$\epsilon_{2\pi}(\sigma)$ die Treppenfunktion

$$\epsilon_{2\pi}(\sigma) = 2n + 1 \quad \text{für } 2\pi n < \sigma < 2\pi(n+1), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (4.40)$$

und

$$\alpha_{1,2} = \int_0^{2\pi} \eta_{1,2}(z) dz, \quad \bar{\alpha}_{1,2} = \int_0^{2\pi} \bar{\eta}_{1,2}(\bar{z}) d\bar{z} \quad (4.41)$$

die Nullmoden der Felder $\eta_{1,2}(z)$ und $\bar{\eta}_{1,2}(\bar{z})$ ³. Aus (4.38) erhalten wir

$$\begin{aligned} \ln y_{1,2}(z + 2\pi) - \ln y_{1,2}(z) &= \alpha_{1,2} \\ \ln \bar{y}_{1,2}(\bar{z} - 2\pi) - \ln \bar{y}_{1,2}(\bar{z}) &= -\bar{\alpha}_{1,2} \end{aligned} \quad (4.42)$$

Durch Vergleich mit den periodischen Randbedingungen (4.32) finden wir

$$e^{\alpha_1} = e^{-\bar{\alpha}_2} = e^{\alpha'}, \quad e^{\alpha_2} = e^{-\bar{\alpha}_1} = e^{-\bar{\alpha}'}. \quad (4.43)$$

Daher gilt

$$\alpha_1 + \bar{\alpha}_2 = 2\pi i m, \quad \bar{\alpha}_1 + \alpha_2 = -2\pi i \bar{m}, \quad m, \bar{m} \in \mathbb{Z}. \quad (4.44)$$

Da α' und $\bar{\alpha}'$ bisher nur durch ihre Exponentiale $e^{\alpha'}$ und $e^{\bar{\alpha}'}$ gegeben waren, können wir definieren

$$\alpha' \equiv \alpha_1, \quad \bar{\alpha}' \equiv \bar{\alpha}_1. \quad (4.45)$$

Setzen wir nun die Integrale (4.38) in (4.36) ein, so erhalten wir

$$\kappa(\sigma, \tau) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [\eta_1(\tau + \sigma') + \bar{\eta}_2(\tau - \sigma')] h(\sigma - \sigma') d\sigma' +$$

³Die Nullmoden der Felder $\eta_{1,2}(z)$ und $\bar{\eta}_{1,2}(\bar{z})$ haben wegen ihrer Periodizität (4.35) keinen in z bzw. \bar{z} linear anwachsenden Beitrag.

$$\begin{aligned}
& + \frac{\tau}{2\pi}(\alpha_1 - \bar{\alpha}_2) + i\sigma m + D_1 - \bar{D}_2 \\
\bar{\kappa}(\sigma, \tau) &= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [\bar{\eta}_1(\tau - \sigma') + \eta_2(\tau + \sigma')] h(\sigma - \sigma') d\sigma' + \\
& + \frac{\tau}{2\pi}(\bar{\alpha}_1 - \alpha_2) + i\sigma \bar{m} + \bar{D}_1 - D_2.
\end{aligned} \tag{4.46}$$

Wir sehen hieraus einerseits, daß m und \bar{m} angeben, wie oft $e^{\kappa(\sigma, \tau)}$ und $e^{\bar{\kappa}(\sigma, \tau)}$ den Ursprung 0 der komplexen Zahlenebene umlaufen, wenn σ von 0 bis 2π anwächst. Andererseits erkennen wir, daß die Konstanten $D_1 - \bar{D}_2$ und $\bar{D}_1 - D_2$ durch die Nullmoden von κ und $\bar{\kappa}$ eindeutig festgelegt sind. Darüber hinausgehende Festlegungen dieser Konstanten haben keine physikalische Bedeutung und können zum Zwecke technischer Einfachheit erfolgen. Dazu betrachten wir die freien Felder $\psi(\sigma, \tau)$ und $\bar{\psi}(\sigma, \tau)$ als Funktionen der $y_{1,2}(z)$ und $\bar{y}_{1,2}(\bar{z})$ im nichtperiodischen Fall (3.103). Wir wollen annehmen, daß diese freien Felder auch im periodischen Fall eine besondere Rolle spielen, auch wenn wir jetzt noch nicht wissen, daß sie wieder kanonische freie Felder sein werden, weil wir ihre Poissonklammern noch nicht kennen. Diese freien Felder lassen sich auch durch $\eta_{1,2}(z)$, $\bar{\eta}_{1,2}(\bar{z})$, $\kappa(\sigma, \tau)$ und $\bar{\kappa}(\sigma, \tau)$ ausdrücken

$$\begin{aligned}
\gamma\psi(\sigma, \tau) &= \ln \bar{y}_1(\bar{z}) - \ln y_2(z) + \ln \eta_1(z) - \ln(\eta_1(z) - \eta_2(z)) \\
&= \bar{\kappa}(\sigma, \tau) + \ln \eta_1(z) - \ln(\eta_1(z) - \eta_2(z)), \\
\gamma\bar{\psi}(\sigma, \tau) &= \ln y_1(z) - \ln \bar{y}_2(\bar{z}) + \ln \bar{\eta}_1(\bar{z}) - \ln(\bar{\eta}_1(\bar{z}) - \bar{\eta}_2(\bar{z})) \\
&= \kappa(\sigma, \tau) + \ln \bar{\eta}_1(\bar{z}) - \ln(\bar{\eta}_1(\bar{z}) - \bar{\eta}_2(\bar{z})).
\end{aligned} \tag{4.47}$$

Zur Abkürzung definieren wir

$$\begin{aligned}
\lambda(z) &\equiv \ln \eta_1(z) - \ln(\eta_1(z) - \eta_2(z)), \\
\bar{\lambda}(\bar{z}) &\equiv \ln \bar{\eta}_1(\bar{z}) - \ln(\bar{\eta}_1(\bar{z}) - \bar{\eta}_2(\bar{z}))
\end{aligned} \tag{4.48}$$

mit den Nullmoden

$$\begin{aligned}
\lambda_{\text{null}}(z) &= \frac{P_\lambda}{2\pi} z + Q_\lambda, \\
\bar{\lambda}_{\text{null}}(\bar{z}) &= \frac{\bar{P}_\lambda}{2\pi} \bar{z} + \bar{Q}_\lambda,
\end{aligned} \tag{4.49}$$

wobei

$$\begin{aligned}
P_\lambda &= \int_0^{2\pi} \lambda'(z) dz = \int_0^{2\pi} \frac{\eta_1(z)\eta_2'(z) - \eta_1'(z)\eta_2(z)}{\eta_1(z)(\eta_1(z) - \eta_2(z))} dz, \\
\bar{P}_\lambda &= \int_0^{2\pi} \bar{\lambda}'(\bar{z}) d\bar{z} = \int_0^{2\pi} \frac{\bar{\eta}_1(\bar{z})\bar{\eta}_2'(\bar{z}) - \bar{\eta}_1'(\bar{z})\bar{\eta}_2(\bar{z})}{\bar{\eta}_1(\bar{z})(\bar{\eta}_1(\bar{z}) - \bar{\eta}_2(\bar{z}))} d\bar{z}, \\
Q_\lambda &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\lambda(z) - \frac{P_\lambda}{2\pi} z \right) dz, \\
\bar{Q}_\lambda &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\bar{\lambda}(\bar{z}) - \frac{\bar{P}_\lambda}{2\pi} \bar{z} \right) d\bar{z}.
\end{aligned} \tag{4.50}$$

Wegen der Periodizität der Funktionen $\eta_{1,2}(z)$ und $\bar{\eta}_{1,2}(\bar{z})$ sind P_λ und \bar{P}_λ ganzzahlige Vielfache von $2\pi i$. Die Nullmoden der Felder ψ und $\bar{\psi}$ (4.47) berechnen sich dann zu

$$\begin{aligned}
\psi_{\text{null}} &= \bar{\kappa}_{\text{null}} + \lambda_{\text{null}} \\
&= \frac{\tau}{2\pi}(\bar{\alpha}_1 - \alpha_2) + i\sigma\bar{m} + \bar{D}_1 - D_2 + \frac{P_\lambda}{2\pi}(\tau + \sigma) + Q_\lambda, \\
\bar{\psi}_{\text{null}} &= \kappa_{\text{null}} + \bar{\lambda}_{\text{null}} \\
&= \frac{\tau}{2\pi}(\alpha_1 - \bar{\alpha}_2) + i\sigma m + D_1 - \bar{D}_2 + \frac{\bar{P}_\lambda}{2\pi}(\tau - \sigma) + \bar{Q}_\lambda.
\end{aligned} \tag{4.51}$$

Für die weitere Diskussion ist die Aufspaltung dieser Nullmoden in einen linearen Teil

$$\begin{aligned}
\psi_P(\sigma, \tau) &= \frac{\sigma}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial\psi(\sigma', \tau)}{\partial\sigma'} d\sigma' + \frac{\tau}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial\psi(\sigma', \tau)}{\partial\tau} d\sigma' \\
&= \frac{\tau}{2\pi}(\bar{\alpha}_1 - \alpha_2) + i\sigma\bar{m} + \frac{P_\lambda}{2\pi}(\tau + \sigma), \\
\bar{\psi}_P(\sigma, \tau) &= \frac{\sigma}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial\bar{\psi}(\sigma', \tau)}{\partial\sigma'} d\sigma' + \frac{\tau}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial\bar{\psi}(\sigma', \tau)}{\partial\tau} d\sigma' \\
&= \frac{\tau}{2\pi}(\alpha_1 - \bar{\alpha}_2) + i\sigma m + \frac{\bar{P}_\lambda}{2\pi}(\tau - \sigma)
\end{aligned} \tag{4.52}$$

und einen konstanten Teil

$$\begin{aligned}\psi_Q &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\psi(\sigma, \tau) - \psi_P(\sigma, \tau)) d\sigma = \bar{D}_1 - D_2 + Q_\lambda, \\ \bar{\psi}_Q &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\bar{\psi}(\sigma, \tau) - \bar{\psi}_P(\sigma, \tau)) d\sigma = D_1 - \bar{D}_2 + \bar{Q}_\lambda\end{aligned}\quad (4.53)$$

zweckmäßig.⁴ Wir wollen (4.53) gleichmäßig auf die chiralen und antichiralen Komponenten von ψ und $\bar{\psi}$ verteilen. Da $\ln y_1$ und $\ln \bar{y}_1$ selbst solche Komponenten sind, folgt aus (4.38)

$$D_1 = \frac{\bar{\psi}_Q}{2}, \quad \bar{D}_1 = \frac{\psi_Q}{2}, \quad (4.54)$$

und mittels (4.53)

$$D_2 = Q_\lambda - \frac{\psi_Q}{2}, \quad \bar{D}_2 = \bar{Q}_\lambda - \frac{\bar{\psi}_Q}{2}. \quad (4.55)$$

Auf diese Weise erreichen wir eine vollständige Fixierung der $GL(2, \mathbb{C})$ -Invarianz, ohne explizit einen Punkt auf dem Kreis auszuzeichnen⁵.

Am Schluß dieses Abschnittes wollen wir zusammenfassen, wie die Funktionen $y_{1,2}(z)$ und $\bar{y}_{1,2}(\bar{z})$ aus den vorgegebenen Anfangswerten für die physikalischen Felder (3.46) mit den Nebenbedingungen (4.32) und (4.54) tatsächlich ermittelt werden können. Zuerst werden wie im nichtperiodischen Fall (Abschnitt 3.5) aus den Anfangsbedingungen die Koeffizienten der Gelfand-Dikii-Gleichungen bestimmt. Dann werden zu diesen vier beliebige linear unabhängige Lösungen $\tilde{y}_{1,2}(z)$ und $\tilde{\bar{y}}_{1,2}(\bar{z})$ ermittelt. Diese Lösungen genügen den allgemeinen Randbedingungen (4.27). In den Fällen (4.30) können Matrizen N und \bar{N} so bestimmt werden, daß NMN^{-1} und $\bar{N}\bar{M}\bar{N}^{-1}$ Diagonalmatrizen sind. Die Funktionen

$$\begin{pmatrix} y_2(z) \\ y_1(z) \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} \tilde{y}_2(z) \\ \tilde{y}_1(z) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \bar{y}_2(\bar{z}) \\ \bar{y}_1(\bar{z}) \end{pmatrix} = \bar{N} \begin{pmatrix} \tilde{\bar{y}}_2(\bar{z}) \\ \tilde{\bar{y}}_1(\bar{z}) \end{pmatrix} \quad (4.56)$$

⁴Stärker als linear anwachsende Beiträge gibt es wegen der Dynamik von ψ und $\bar{\psi}$ nicht. Das ist aus der Darstellung (3.103) in Verbindung mit der Quasiperiodizität der Funktionen $y_{1,2}$ und $\bar{y}_{1,2}$ (4.32) ersichtlich.

⁵Genau genommen wird durch die Behandlung der linear anwachsenden Nullmoden der Punkt $(\sigma, \tau) = (0, 0)$ ausgezeichnet. Dies hat aber bei der späteren Berechnung von Poissonklammern, im Gegensatz zur Vorgabe von Funktionswerten an einer festen Stelle σ_0 , keinen Einfluß auf die Oszillatormoden.

erfüllen dann die Randbedingungen (4.32). Die Funktionen (4.56) sind nur bis auf die Skalierungen (4.33) eindeutig. Sie lassen aber die eindeutige Bestimmung der Funktionen $\eta_{1,2}(z)$, $\bar{\eta}_{1,2}(\bar{z})$ (4.34), $\kappa(\sigma, \tau)$, $\bar{\kappa}(\sigma, \tau)$ (4.36), $\psi(\sigma, \tau)$ und $\bar{\psi}(\sigma, \tau)$ (4.47) zu. Aus diesen werden die Konstanten $\alpha_{1,2}$, $\bar{\alpha}_{1,2}$ (4.41), m , \bar{m} (4.44), P_λ , \bar{P}_λ , Q_λ , \bar{Q}_λ (4.50), ψ_Q und $\bar{\psi}_Q$ (4.53) ermittelt. Dann bestimmen wir aus (4.54) und (4.55) die Konstanten $D_{1,2}$ und $\bar{D}_{1,2}$. Setzen wir diese Konstanten in (4.38) ein, so erhalten wir mit

$$\begin{aligned} \ln y_1(\tau + \sigma) &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \eta_1(\tau + \sigma') h(\sigma - \sigma') d\sigma' + \frac{\tau + \sigma}{2\pi} \alpha_1 + \frac{\bar{\psi}_Q}{2}, \\ \ln y_2(\tau + \sigma) &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \eta_2(\tau + \sigma') h(\sigma - \sigma') d\sigma' + \frac{\tau + \sigma}{2\pi} \alpha_2 + Q_\lambda - \frac{\psi_Q}{2}, \\ \ln \bar{y}_1(\tau - \sigma) &= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \bar{\eta}_1(\tau - \sigma') h(\sigma - \sigma') d\sigma' + \frac{\tau - \sigma}{2\pi} \bar{\alpha}_1 + \frac{\psi_Q}{2}, \\ \ln \bar{y}_2(\tau - \sigma) &= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \bar{\eta}_2(\tau - \sigma') h(\sigma - \sigma') d\sigma' + \frac{\tau - \sigma}{2\pi} \bar{\alpha}_2 + \bar{Q}_\lambda - \frac{\bar{\psi}_Q}{2} \end{aligned} \quad (4.57)$$

schließlich die expliziten Ausdrücke für $y_{1,2}(z)$ und $\bar{y}_{1,2}(\bar{z})$.

4.6 Die Poissonklammern der (anti-) chiralen Felder im periodischen Fall

Die eindeutige Bestimmung der Funktionen $y_{1,2}(z)$ und $\bar{y}_{1,2}(\bar{z})$ im vorangehenden Abschnitt erlaubt uns wie im nichtperiodischen Fall (Abschnitt 3.6) die strenge Herleitung der Poissonklammern der Funktionen $y_{1,2}(z)$ und $\bar{y}_{1,2}(\bar{z})$ aus denen der physikalischen Felder.

Zuerst bestimmen wir die Poissonklammern von $\eta_{1,2}(z)$, $\bar{\eta}_{1,2}(\bar{z})$, $\kappa(\sigma, \tau)$ und $\bar{\kappa}(\sigma, \tau)$. Die Poissonklammern von $y_{1,2}$ und $\bar{y}_{1,2}$ können dann mit (4.57) berechnet werden. Wir haben also die Variationen $\delta\eta_{1,2}(z)$ und $\delta\bar{\eta}_{1,2}(\bar{z})$ zu vorgegebenen Variationen der physikalischen Felder und Impulse zu ermitteln. Dazu variieren wir die Gelfand-Dikii-Gleichungen und finden die Gleichungen (3.63). Aus den Randbedingungen (4.32) erhalten wir durch Varia-

tion und Eliminierung von $\delta\alpha'$ und $\delta\bar{\alpha}'$ die Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} y'_k(z)\delta y_k(z+2\pi) - y_k(z)\delta y'_k(z+2\pi) &= y'_k(z+2\pi)\delta y_k(z) - y_k(z+2\pi)\delta y'_k(z), \\ \bar{y}'_k(\bar{z})\delta \bar{y}_k(\bar{z}-2\pi) - \bar{y}_k(\bar{z})\delta \bar{y}'_k(\bar{z}-2\pi) &= \bar{y}'_k(\bar{z}-2\pi)\delta \bar{y}_k(\bar{z}) - \bar{y}_k(\bar{z}-2\pi)\delta \bar{y}'_k(\bar{z}), \\ (k \in \{1, 2\}). \end{aligned} \quad (4.58)$$

Diese schränken die aus einer speziellen Lösung der Gleichung (3.63) und der allgemeinen Lösung von (3.47) zusammengesetzte allgemeine Lösung ein auf

$$\begin{aligned} \delta y_k(z) &= \int_0^{2\pi} \Omega_k(z, z') \left(\delta(\partial V_-/V_-)(z')y'_k(z') + \gamma^2 \delta T(z')y_k(z') \right) dz' + \delta C_k y_k(z), \\ \Omega_1(z, z') &\equiv \frac{y_2(z')y_1(z)}{y_1(z')y'_2(z') - y_2(z')y'_1(z')} \frac{E(z, z') - \epsilon_{2\pi}(z - z')}{2}, \\ \Omega_2(z, z') &\equiv \frac{y_1(z')y_2(z)}{y_1(z')y'_2(z') - y_2(z')y'_1(z')} \frac{E(z', z) + \epsilon_{2\pi}(z - z')}{2}, \\ E(z, z') &\equiv \frac{\exp\left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}\epsilon_{2\pi}(z - z')\right)}{\sinh \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}} \frac{y_2(z)y_1(z')}{y_1(z)y_2(z')}, \\ \delta \bar{y}_k(\bar{z}) &= \int_0^{2\pi} \bar{\Omega}_k(\bar{z}, \bar{z}') \left(\delta(\partial \bar{V}_-/\bar{V}_-)(\bar{z}')\bar{y}'_k(\bar{z}') + \gamma^2 \delta \bar{T}(\bar{z}')\bar{y}_k(\bar{z}') \right) d\bar{z}' + \delta \bar{C}_k \bar{y}_k(\bar{z}), \\ \bar{\Omega}_1(\bar{z}, \bar{z}') &\equiv \frac{\bar{y}_2(\bar{z}')\bar{y}_1(\bar{z})}{\bar{y}_1(\bar{z}')\bar{y}'_2(\bar{z}') - \bar{y}_2(\bar{z}')\bar{y}'_1(\bar{z}')} \frac{\bar{E}(\bar{z}, \bar{z}') - \epsilon_{2\pi}(\bar{z} - \bar{z}')}{2}, \\ \bar{\Omega}_2(\bar{z}, \bar{z}') &\equiv \frac{\bar{y}_1(\bar{z}')\bar{y}_2(\bar{z})}{\bar{y}_1(\bar{z}')\bar{y}'_2(\bar{z}') - \bar{y}_2(\bar{z}')\bar{y}'_1(\bar{z}')} \frac{\bar{E}(\bar{z}', \bar{z}) + \epsilon_{2\pi}(\bar{z} - \bar{z}')}{2}, \\ E(\bar{z}, \bar{z}') &\equiv \frac{\exp\left(\frac{\bar{\alpha}_1 - \bar{\alpha}_2}{2}\epsilon_{2\pi}(\bar{z} - \bar{z}')\right)}{\sinh \frac{\bar{\alpha}_1 - \bar{\alpha}_2}{2}} \frac{\bar{y}_2(\bar{z})\bar{y}_1(\bar{z}')}{\bar{y}_1(\bar{z})\bar{y}_2(\bar{z}')} \end{aligned} \quad (4.59)$$

Die Variationen $\delta C_{1,2}$ und $\delta \bar{C}_{1,2}$ entsprechen den Skalierungen (4.33). Sie können nicht einfach gleich Null gesetzt werden, weil die Integrale in (4.59) sich über nichtperiodische Funktionen von z' bzw. \bar{z}' erstrecken und daher ohne die Terme $\delta C_{1,2}y_{1,2}(z)$ und $\delta \bar{C}_{1,2}\bar{y}_{1,2}(\bar{z})$ von einer Verschiebung der Integrationsgrenzen abhängig wären.

Wir wissen aber, daß die Funktionen $\eta_{1,2}(z)$ und $\bar{\eta}_{1,2}(\bar{z})$ nicht von den Skalierungen (4.33) abhängen. Wir berechnen ihre Variationen nach der Vorschrift

$$\begin{aligned}\delta\eta_{1,2}(z) &= \delta\frac{y'_{1,2}(z)}{y_{1,2}(z)} = \frac{\delta y'_{1,2}(z)}{y_{1,2}(z)} - \frac{y'_{1,2}(z)\delta y_{1,2}(z)}{y_{1,2}(z)^2}, \\ \delta\bar{\eta}_{1,2}(\bar{z}) &= \delta\frac{\bar{y}'_{1,2}(\bar{z})}{\bar{y}_{1,2}(\bar{z})} = \frac{\delta\bar{y}'_{1,2}(\bar{z})}{\bar{y}_{1,2}(\bar{z})} - \frac{\bar{y}'_{1,2}(\bar{z})\delta\bar{y}_{1,2}(\bar{z})}{\bar{y}_{1,2}(\bar{z})^2}.\end{aligned}\quad (4.60)$$

Dabei heben sich, wie zu erwarten, die unbestimmten Terme $\delta C_k y_k(z)$ und $\delta\bar{C}_k \bar{y}_k(\bar{z})$ von den Gln. (4.59) heraus, und wir erhalten

$$\begin{aligned}\delta\eta_k(z) &= \int_0^{2\pi} \omega_k(z, z') \left(\delta(\partial V_-/V_-)(z')\eta'_k(z') + \gamma^2 \delta T(z')\eta_k(z') \right) dz', \\ \omega_1(z, z') &\equiv \frac{1}{2}E(z, z') \frac{\eta_1(z) - \eta_2(z)}{\eta_1(z') - \eta_2(z')}, \\ \omega_2(z, z') &\equiv -\frac{1}{2}E(z', z) \frac{\eta_1(z) - \eta_2(z)}{\eta_1(z') - \eta_2(z')}, \\ \delta\bar{\eta}_k(\bar{z}) &= \int_0^{2\pi} \bar{\omega}_k(\bar{z}, \bar{z}') \left(\delta(\partial \bar{V}_-/\bar{V}_-)(\bar{z}')\bar{\eta}'_k(\bar{z}') + \gamma^2 \delta \bar{T}(\bar{z}')\bar{\eta}_k(\bar{z}') \right) d\bar{z}', \\ \bar{\omega}_1(\bar{z}, \bar{z}') &\equiv \frac{1}{2}\bar{E}(\bar{z}, \bar{z}') \frac{\bar{\eta}_1(\bar{z}) - \bar{\eta}_2(\bar{z})}{\bar{\eta}_1(\bar{z}') - \bar{\eta}_2(\bar{z}')}, \\ \bar{\omega}_2(\bar{z}, \bar{z}') &\equiv -\frac{1}{2}\bar{E}(\bar{z}', \bar{z}) \frac{\bar{\eta}_1(\bar{z}) - \bar{\eta}_2(\bar{z})}{\bar{\eta}_1(\bar{z}') - \bar{\eta}_2(\bar{z}')}. \end{aligned}\quad (4.61)$$

Wir sehen auch, daß erwartungsgemäß die Integranden von (4.61) periodische Funktionen der Integrationsvariablen sind, so daß die Integrale von einer Verschiebung der Integrationsgrenzen unabhängig sind. Aus (4.61) können wir nun die Poissonklammern der Funktionen $\eta_{1,2}(z)$ und $\bar{\eta}_{1,2}(\bar{z})$ berechnen. Die nichtverschwindenden Poissonklammern (bei gleicher Zeit τ) sind

$$\begin{aligned}\{\eta_1(z), \eta_2(z')\} &= \frac{\gamma^2}{2}(\eta_1(z) - \eta_2(z))E(z, z')(\eta_1(z') - \eta_2(z')) - \\ &\quad - \gamma^2(\eta_1(z) - \eta_2(z))\delta_{2\pi}(z - z'), \\ \{\bar{\eta}_1(\bar{z}), \bar{\eta}_2(\bar{z}')\} &= \frac{\gamma^2}{2}(\bar{\eta}_1(\bar{z}) - \bar{\eta}_2(\bar{z}))\bar{E}(\bar{z}, \bar{z}')(\bar{\eta}_1(\bar{z}') - \bar{\eta}_2(\bar{z}')) - \\ &\quad - \gamma^2(\bar{\eta}_1(\bar{z}) - \bar{\eta}_2(\bar{z}))\delta_{2\pi}(\bar{z} - \bar{z}').\end{aligned}\quad (4.62)$$

Weitere Poissonklammern und Rechenregeln sind in den Anhängen I und F aufgeführt. Schließlich erhalten wir über die Darstellung (4.57) die Poissonklammern der Funktionen $\ln y_{1,2}$ und $\ln \bar{y}_{1,2}$, die hier mit der im Anhang I erklärten argumentfreien Kurzschreibweise notiert sind

$$\begin{aligned}
\{\ln y_1, \ln y_1\} &= \{\ln \bar{y}_1, \ln \bar{y}_1\} = 0, \\
\{\ln y_1, \ln y_2\} &= \frac{\gamma^2}{2} \left(\boldsymbol{\epsilon} - \frac{\mathbf{L}}{2\pi} \right) - \frac{\gamma^2}{2} \mathbf{E} + \frac{\gamma^2}{8\pi} \int \mathbf{E}, \\
\{\ln y_1, \ln \bar{y}_1\} &= -\frac{\gamma^2}{4\pi} \mathbf{S}, \\
\{\ln y_1, \ln \bar{y}_2\} &= -\frac{\gamma^2}{8\pi} \int \bar{\mathbf{F}}, \\
\{\ln \bar{y}_1, \ln y_2\} &= -\frac{\gamma^2}{8\pi} \int \mathbf{F}, \\
\{\ln \bar{y}_1, \ln \bar{y}_2\} &= -\frac{\gamma^2}{2} \left(\boldsymbol{\epsilon} - \frac{\mathbf{L}}{2\pi} \right) - \frac{\gamma^2}{2} \bar{\mathbf{E}} + \frac{\gamma^2}{8\pi} \int \bar{\mathbf{E}}, \\
\{\ln y_2, \ln y_2\} &= -\frac{\gamma^2}{8\pi} \int \mathbf{F} + \frac{\gamma^2}{8\pi} \mathbf{F}^T \int, \\
\{\ln y_2, \ln \bar{y}_2\} &= -\frac{\gamma^2}{4\pi} \mathbf{S} - \frac{\gamma^2}{8\pi} \mathbf{E}^T \int + \frac{\gamma^2}{8\pi} \int \bar{\mathbf{E}}, \\
\{\ln \bar{y}_2, \ln \bar{y}_2\} &= -\frac{\gamma^2}{8\pi} \int \bar{\mathbf{F}} + \frac{\gamma^2}{8\pi} \bar{\mathbf{F}}^T \int.
\end{aligned} \tag{4.63}$$

Auf den ersten Blick mag es verwundern, daß in dieser Algebra y_1 und y_2 bzw. \bar{y}_1 und \bar{y}_2 asymmetrisch auftreten. Doch das ist nicht weiter erstaunlich, da diese Funktionen auch unterschiedlich in die Felder ψ und $\bar{\psi}$ (4.47) eingehen, auf deren Grundlage die Integrationskonstanten $D_{1,2}$ und $\bar{D}_{1,2}$ festgelegt wurden. Eine symmetrische Behandlung der Funktionen $y_{1,2}$ und $\bar{y}_{1,2}$ wird im Anhang J vorgestellt. Es erweist sich aber, daß für die im nächsten Abschnitt gesuchte Transformation der physikalischen Felder auf kanonische freie Felder die Algebra (4.63) besser geeignet ist.

4.7 Die kanonische Transformation auf periodische freie Felder

Das Auffinden einer kanonischen Transformation der wechselwirkenden Felder u und \bar{u} auf freie Felder ψ und $\bar{\psi}$ verläuft zunächst völlig analog zum nichtperiodischen Fall (Abschnitt 3.7). Der Ansatz, daß die chiralen und antichiralen Komponenten der freien Felder Funktionen der $y_{1,2}$, $\bar{y}_{1,2}$ und deren Ableitungen sein sollen, führt auf die Darstellung der Komponenten freier Felder (3.79). Im Unterschied zum nichtperiodischen Fall führt das jedoch nicht in jedem Fall auf Poissonklammern freier Felder. Die Diskussion, die zur Wahl (3.88) führt, gilt aber unverändert. Auch die sich daraus ergebende Folgerung (3.92) bleibt bestehen.

Das Transformationsverhalten der Konstanten α , $\bar{\alpha}$, β , $\bar{\beta}$, D und \bar{D} (3.97) läßt sich ebenfalls ohne Veränderung übertragen. Die wegen der Periodizität der physikalischen Felder veränderte Fixierung der $GL(2, \mathbb{C})$ -Invarianz der Funktionen $y_{1,2}$ und $\bar{y}_{1,2}$ (4.32) beeinflußt aber die Bestimmung der Konstanten α , $\bar{\alpha}$, β und $\bar{\beta}$. Wegen des quasiperiodischen Verhaltens der Freifeld-Komponenten einerseits

$$\begin{aligned}\phi_{1,2}(z + 2\pi) &= \phi_{1,2}(z) + p_{1,2}, & p_{1,2} &= \text{const}, \\ \bar{\phi}_{1,2}(\bar{z} + 2\pi) &= \bar{\phi}_{1,2}(\bar{z}) + \bar{p}_{1,2}, & \bar{p}_{1,2} &= \text{const},\end{aligned}\tag{4.64}$$

und des Verhaltens der Funktionen $y_{1,2}$ und $\bar{y}_{1,2}$ (4.32) andererseits muß jeweils eine der Konstanten in den Paaren (α, β) und $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ Null sein, um die Gültigkeit der Gleichungen (3.79) zu gewährleisten. Die aus den Komponenten zusammengesetzten freien Felder ψ und $\bar{\psi}$ (3.77) sollen periodisch sein (bis auf Windungszahlbeiträge). Das ist unter Berücksichtigung der Relationen (4.43) und (4.44) bei ansonsten voneinander unabhängigen $\alpha_{1,2}$ und $\bar{\alpha}_{1,2}$ nur dann gesichert, wenn in der Darstellung (3.79) entweder α und $\bar{\alpha}$ oder β und $\bar{\beta}$ gleichzeitig Null werden. Diese beiden Fälle gehen durch Vertauschung der Funktionen

$$y_1(z) \leftrightarrow y_2(z), \quad \bar{y}_1(\bar{z}) \leftrightarrow \bar{y}_2(\bar{z})\tag{4.65}$$

auseinander hervor. Deshalb können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit

$$\beta = \bar{\beta} = 0\tag{4.66}$$

wählen⁶. Setzen wir das in (3.79) ein, beachten (3.92) und definieren

$$\phi_0 \equiv D + \ln \alpha, \quad \chi_0 \equiv \ln \alpha, \quad \bar{\phi}_0 \equiv \bar{D} + \ln \bar{\alpha}, \quad \bar{\chi}_0 \equiv \ln \bar{\alpha}, \quad (4.67)$$

so erhalten wir als mögliche Komponenten freier Felder

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{1}{\gamma} \ln \frac{y'_1}{y_1 y'_2 - y'_1 y_2} + \phi_0, & \chi &= \frac{1}{\gamma} \ln y_1 + \chi_0, \\ \bar{\phi} &= \frac{1}{\gamma} \ln \frac{\bar{y}'_1}{\bar{y}_1 \bar{y}'_2 - \bar{y}'_1 \bar{y}_2} + \bar{\phi}_0, & \bar{\chi} &= \frac{1}{\gamma} \ln \bar{y}_1 + \bar{\chi}_0. \end{aligned} \quad (4.68)$$

Aus der Kenntnis der Poissonklammern der Felder $y_{1,2}$ und $\bar{y}_{1,2}$ (4.63) lassen sich die Poissonklammern der Felder $\phi - \phi_0$, $\chi - \chi_0$, $\bar{\phi} - \bar{\phi}_0$ und $\bar{\chi} - \bar{\chi}_0$ wie folgt bestimmen

$$\begin{aligned} \{\phi(\tau + \sigma) - \phi_0, \phi(\tau + \sigma') - \phi_0\} &= \{\chi(\tau + \sigma) - \chi_0, \chi(\tau + \sigma') - \chi_0\} = 0 \\ \{\phi(\tau + \sigma) - \phi_0, \chi(\tau + \sigma') - \chi_0\} &= -\frac{1}{2} \left(\epsilon_{2\pi}(\sigma - \sigma') - \frac{\sigma - \sigma'}{2\pi} \right), \\ \{\phi(\tau + \sigma) - \phi_0, \bar{\phi}(\tau - \sigma') - \bar{\phi}_0\} &= -\frac{\sigma + \sigma'}{4\pi}, \\ \{\chi(\tau + \sigma) - \chi_0, \bar{\chi}(\tau - \sigma') - \bar{\chi}_0\} &= -\frac{\sigma + \sigma'}{4\pi}, \\ \{\phi(\tau + \sigma) - \phi_0, \bar{\chi}(\tau - \sigma') - \bar{\chi}_0\} &= \{\chi(\tau + \sigma) - \chi_0, \bar{\phi}(\tau - \sigma') - \bar{\phi}_0\} = 0, \\ \{\bar{\phi}(\tau - \sigma) - \bar{\phi}_0, \bar{\phi}(\tau - \sigma') - \bar{\phi}_0\} &= \{\bar{\chi}(\tau - \sigma) - \bar{\chi}_0, \bar{\chi}(\tau - \sigma') - \bar{\chi}_0\} = 0, \\ \{\bar{\phi}(\tau - \sigma) - \bar{\phi}_0, \bar{\chi}(\tau - \sigma') - \bar{\chi}_0\} &= \frac{1}{2} \left(\epsilon_{2\pi}(\sigma - \sigma') - \frac{\sigma - \sigma'}{2\pi} \right). \end{aligned} \quad (4.69)$$

Das sind aber genau die Poissonklammern, die sich aus (3.78) ergeben, wenn für $\phi_{1,2}$ und $\bar{\phi}_{1,2}$ die Poissonklammern der Komponenten freier Felder mit Nullmoden

$$\begin{aligned} \{\phi_k(\tau + \sigma), \phi_l(\tau + \sigma')\} &= -\frac{\delta_{kl}}{4} \left(\epsilon_{2\pi}(\sigma - \sigma') - \frac{\sigma - \sigma'}{2\pi} \right), \\ \{\bar{\phi}_k(\tau - \sigma), \bar{\phi}_l(\tau - \sigma')\} &= \frac{\delta_{kl}}{4} \left(\epsilon_{2\pi}(\sigma - \sigma') - \frac{\sigma - \sigma'}{2\pi} \right), \\ \{\phi_k(\tau + \sigma), \bar{\phi}_l(\tau - \sigma')\} &= -\frac{\delta_{kl}}{8\pi} (\sigma + \sigma') \end{aligned} \quad (4.70)$$

⁶Daß diese Wahl die Allgemeinheit nicht einschränkt, wird ersichtlich, wenn die Funktionen $y_{1,2}(z)$ und $\bar{y}_{1,2}(\bar{z})$ durch die in (J.3) definierten Funktionen $\tilde{y}_{1,2}(z)$ und $\tilde{\bar{y}}_{1,2}(\bar{z})$ mit symmetrischen Poissonklammern ersetzt werden.

verwendet werden und

$$\phi_0 = \chi_0 = \bar{\phi}_0 = \bar{\chi}_0 = 0 \quad (4.71)$$

gesetzt wird. Dieser einfache durch Ersetzung gegebene Zusammenhang zwischen periodischer und nichtperiodischer kanonischer Transformationen ist gerade möglich wegen der speziellen Definition der Funktionen $y_{1,2}$ und $\bar{y}_{1,2}$ (4.57). Das ist daran zu erkennen, daß beispielsweise der Übergang zu den symmetrisch definierten Funktionen $\tilde{y}_{1,2}$ und $\tilde{\bar{y}}_{1,2}$ des Anhangs J wegen der Verschiebungen (J.3) zu anderen Konstanten $\phi_0, \chi_0, \bar{\phi}_0$ und $\bar{\chi}_0$ mit nichttrivialen Poissonklammern führt. Da diese Verschiebungen mit der Mehrdeutigkeit der Aufteilung der Nullmoden der freien Felder in einen chiralen und einen antichiralen Teil zusammenhängen, beschreiben die Konstanten $\phi_0, \chi_0, \bar{\phi}_0$ und $\bar{\chi}_0$ offenbar gerade diese im feldtheoretischen Fall fehlende Mehrdeutigkeit. Mit den Funktionen $y_{1,2}$ und $\bar{y}_{1,2}$ (4.57) erhalten wir also auch den Zusammenhang (3.101). Diese Darstellung läßt sich eindeutig nach den Funktionen $y_{1,2}$ und $\bar{y}_{1,2}(\bar{z})$ auflösen, wenn die speziellen Periodizitätseigenschaften (4.32) beachtet werden

$$\begin{aligned} y_1(z) &= \exp(\gamma\chi(z)) \\ y_2(z) &= -\frac{\exp(\gamma\chi(z))}{2\sinh(\gamma p_1)} \int_0^{2\pi} dz' \gamma\chi'(z') \exp(-\gamma p_1 \epsilon_{2\pi}(z-z') - 2\gamma\phi_1(z')) \\ \bar{y}_1(\bar{z}) &= \exp(\gamma\bar{\chi}(\bar{z})) \\ \bar{y}_2(\bar{z}) &= -\frac{\exp(\gamma\bar{\chi}(\bar{z}))}{2\sinh(\gamma\bar{p}_1)} \int_0^{2\pi} d\bar{z}' \gamma\bar{\chi}'(\bar{z}') \exp(-\gamma\bar{p}_1 \epsilon_{2\pi}(\bar{z}-\bar{z}') - 2\gamma\bar{\phi}_1(\bar{z}')) . \end{aligned} \quad (4.72)$$

Hierbei sind p_1 und \bar{p}_1 die in der Modenentwicklung von $\phi_1(z)$ und $\bar{\phi}_1(\bar{z})$

$$\begin{aligned} \phi_1(z) &= \phi_Q + \frac{z}{2\pi} p_1 + \phi_{1,\text{osz}} \\ \bar{\phi}_1(\bar{z}) &= \bar{\phi}_Q + \frac{\bar{z}}{2\pi} \bar{p}_1 + \bar{\phi}_{1,\text{osz}} \end{aligned} \quad (4.73)$$

auf tretenden Konstanten, die das Quasiperiodizitätsverhalten von ϕ_1 und $\bar{\phi}_1$ (4.64) bestimmen.

Da offenbar die Darstellung der freien Felder ψ und $\bar{\psi}$ als Funktion der $y_{1,2}$ und $\bar{y}_{1,2}$ (3.103) unverändert bleibt, kann auch die Bäcklund-Transformation

ohne Änderung gegenüber dem nichtperiodischen Fall übernommen werden, wenn die Nullmodenstruktur der periodischen freien Felder berücksichtigt wird.

Die kanonische Transformation der physikalischen Felder $r(\sigma, \tau)$, $t(\sigma, \tau)$ bzw. $u(\sigma, \tau)$, $\bar{u}(\sigma, \tau)$ auf die freien Felder $\psi(\sigma, \tau)$ und $\bar{\psi}(\sigma, \tau)$ ist vollständig durch die Kette der Ersetzungen (3.21), (3.22), (3.51), (4.72), (3.77) gegeben. Das Ergebnis werden wir hier wegen seiner Komplexität nicht angeben. Stellvertretend kann hier die Bäcklund-Transformation (3.104) als zusammenfassendes Resultat genannt werden, da sie auch für den periodischen Fall gilt. Das Ergebnis unserer Untersuchungen kann jetzt als Grundlage für die beabsichtigte kanonische Quantisierung der geeichten $SL(2, \mathbb{R})/U(1)$ -WZNW-Theorie genommen werden. Wir können hoffen, dadurch Antworten auf offene Fragen über das nichtstörungstheoretische Dilaton näherzukommen. Möglicherweise erlaubt die Quantisierung dieses Modells eines Schwarzen Loches auch, Aussagen über dessen Strahlung zu machen.

Kapitel 5

Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wurde das klassische geeichte $SL(2, \mathbb{R})/U(1)$ -WZNW-Modell in Termen seiner dynamischen Felder umfassend behandelt und so die Grundlage für seine kanonische Quantisierung geschaffen. Dazu wurden zuerst die geeichten WZNW-Modelle allgemein behandelt. Das führte zu ihrer Lagrangeschen Formulierung ohne Hilfsfeld. Es wurde ein Lax-Paar für die Bewegungsgleichungen dieser Modelle hergeleitet und so deren Integrabilität gezeigt. Diese Resultate wurden dann auf das geeichte $SL(2, \mathbb{R})/U(1)$ -WZNW-Modell spezialisiert, dessen Geometrie in Übereinstimmung mit der Literatur [15] als zweidimensionales Schwarzes Loch identifiziert wurde. Statt das Lax-Paar für das geeichte $SL(2, \mathbb{R})/U(1)$ -WZNW-Modell zu benutzen, wurde die allgemeine Lösung des Modells aus der Einbettung in eine nichtabelsche Toda-Theorie abgeleitet. Diese Lösung ist parametrisiert durch zwei chirale und zwei antichirale Funktionen und deren Ableitungen, wie das auch bei anderen nichtlinearen integrablen Theorien [46, 32] der Fall ist. Die physikalischen Felder des geeichten $SL(2, \mathbb{R})/U(1)$ -WZNW-Modells sind invariant unter den $GL(2, \mathbb{C})$ -Transformationen (3.23) bzw. (3.53) der (anti-) chiralen Funktionen. Diese Invarianz spielte eine wichtige Rolle bei der Analyse des periodischen geeichten $SL(2, \mathbb{R})/U(1)$ -WZNW-Modells. Die $GL(2, \mathbb{C})$ -Invarianz wurde durch Randbedingungen fixiert und so ein eindeutiger Zusammenhang zwischen den physikalischen Feldern des Modells und den (anti-) chiralen Parameterfunktionen der allgemeinen Lösung hergestellt. Das gestattete die Diskussion von Anfangswertproblemen und wurde dazu benutzt, die Poissonklammern der (anti-) chiralen Funktionen zu berechnen. Die Poissonklammern der Nullmoden des periodischen Modells erwiesen sich als nichttrivial, was bei der späteren Quantisierung des Mo-

dells wichtig werden könnte.¹ Die Kenntnis der Poissonklammern der (anti-)chiralen Felder ermöglichte die Darstellung dieser Felder in Termen kanonischer freier Felder. Auf diese Weise wurde eine kanonische Transformation der physikalischen Felder des geeichten $SL(2, \mathbb{R})/U(1)$ -WZNW-Modells auf freie Felder gefunden, die in einer Bäcklund-Transformation zusammengefaßt wurde.

Die gefundene Frei-Feld-Darstellung ist als Ausgangspunkt für die Quantisierung des geeichten $SL(2, \mathbb{R})/U(1)$ -WZNW-Modells geeignet. Dazu sind die freien Felder als Operatorfelder nach Moden zu entwickeln. Durch Normalordnung der Operatoren treten dabei Modifikationen beim Übergang von den nichtlinearen Poissonklammern zu Kommutatoren auf. Vermutlich erhält auch die kanonische Transformation der physikalischen auf freie Felder Quantenkorrekturen, um die Symmetrien des Modells, insbesondere die Parafermion-Algebra (3.43), zu gewährleisten. Solche Korrekturen könnten auch die Einführung eines Dilatons erzwingen, über das wir auf diese Weise nichtstörungstheoretische Aussagen erhalten würden. Interessant dürfte der Vergleich mit Zugängen zum $SL(2, \mathbb{R})/U(1)$ -Modell [49, 22] sein, bei denen das Modell über die Stromalgebra definiert wird, die wiederum durch freie Felder dargestellt [50] bzw. mit den Mitteln der $SL(2, \mathbb{R})$ -Darstellungstheorie [51] analysiert wird. Während die geometrische Interpretation des Modells bei diesen Zugängen nicht offensichtlich ist, wird sie bei dem in der vorliegenden Arbeit beschriebenen Herangehen durch die kanonische Transformation der physikalischen auf freie Felder zwanglos geliefert.

Auf dem Weg zu physikalisch relevanten Aussagen sind noch einige Fragen zu beantworten. So ist für die Diskussion der Hawking-Strahlung des zweidimensionalen Schwarzen Loches die Kenntnis des Energie-Impuls-Tensors der Materiefelder im Targetraum von Bedeutung. Dazu sind Korrelationsfunktionen der Vertexoperatoren dieser Felder zu berechnen und mit Resultaten des Stromalgebra-Zugangs [52] zu vergleichen. Weiterhin ist die Unitarität des $SL(2, \mathbb{R})/U(1)$ -Modells bei Minkowskischer Signatur der Targetraum-Metrik zu klären. Zur Lösung dieses Problems existieren im Stromalgebra-Zugang mehrere voneinander leicht abweichende Vorschläge [47, 48]. Die klare geometrische Interpretation bei der Herangehenweise dieser Arbeit läßt daher auch auf neue Einsichten zum Unitaritätsproblem hoffen.

¹In den Referenzen [47, 48] wurde beispielsweise vorgeschlagen, das Unitaritätsproblem beim $SL(2, \mathbb{R})$ -WZNW-Modell in der Stromalgebra-Formulierung durch die Einführung zusätzlicher Nullmoden zu lösen.

Anhang A

Metrikkonventionen

In diesem Anhang werden die in der Arbeit verwendeten Metrikkonventionen dargestellt. In kovariant geschriebenen Gleichungen steht $\xi^\mu = (\xi^1, \xi^2)$ für die Koordinaten, $\gamma_{\mu\nu}$ für die Metrik, γ für die Determinante der Metrik $\det \gamma_{\mu\nu}$ und $\epsilon_{\mu\nu}$ für das antisymmetrische Symbol mit den Werten +1 und -1 ($\epsilon^{\xi^1 \xi^2} = -\epsilon^{\xi^2 \xi^1} = -\epsilon_{\xi^1 \xi^2} = \epsilon_{\xi^2 \xi^1} = 1$). Für die Metrik wird die Signatur $(+ -)$ angenommen, so daß $\gamma < 0$ gilt. Das invariante Volumenelement ist somit $\sqrt{-\gamma} d^2 \xi$ und der Levi-Civita-Pseudotensor durch $\sqrt{-\gamma} \epsilon_{\mu\nu}$ bzw. durch $\epsilon^{\mu\nu} / \sqrt{-\gamma}$ gegeben. Unter $\epsilon_\mu{}^\nu = -\epsilon^\nu{}_\mu$ sei $\gamma_{\mu\kappa} \epsilon^{\kappa\nu} / \sqrt{-\gamma} = \sqrt{-\gamma} \epsilon_{\mu\kappa} \gamma^{\kappa\nu}$ verstanden. Wenn ein zweistufiger Tensor als Matrix angegeben wird, numeriert der erste Index stets die Zeile, der zweite Index die Spalte der Matrix. Für die Längen von Vektoren gelte die folgende Konvention:

$$v^2 = \gamma_{\mu\nu} v^\mu v^\nu \begin{cases} < 0, & \text{für raumartige Vektoren} \\ = 0, & \text{für nullartige Vektoren} \\ > 0, & \text{für zeitartige Vektoren} \end{cases} . \quad (\text{A.1})$$

Für den Riemannschen Krümmungstensor und den Ricci-Tensor gilt

$$R^\mu{}_{\nu\kappa\lambda} = \Gamma^\mu_{\nu\lambda,\kappa} - \Gamma^\mu_{\nu\kappa,\lambda} + \Gamma^\mu_{\kappa\alpha} \Gamma^\alpha_{\nu\lambda} - \Gamma^\mu_{\lambda\alpha} \Gamma^\alpha_{\nu\kappa}, \quad R_{\mu\nu} = R^\alpha{}_{\mu\alpha\nu}. \quad (\text{A.2})$$

Es werden zwei spezielle Koordinatensysteme benutzt, raum-zeitliche Koordinaten σ, τ sowie Lichtkegelkoordinaten z, \bar{z} . Für sie gelten:

A.1 Raum-zeitliche Koordinaten

$$\xi^\mu = (\tau, \sigma), \quad (\text{A.3})$$

$$\gamma_{\tau\tau} = -\gamma_{\sigma\sigma} = 1, \quad \text{d.h.} \quad \gamma_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.4})$$

$$\epsilon^{\tau\sigma} = -\epsilon^{\sigma\tau} = -\epsilon_{\tau\sigma} = \epsilon_{\sigma\tau} = 1, \quad \text{d.h.} \quad \frac{\epsilon^{\mu\nu}}{\sqrt{-\gamma}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.5})$$

$$\epsilon_\mu{}^\nu = -\epsilon^\nu{}_\mu = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.6})$$

$$\sqrt{-\gamma} d^2\xi = d\sigma d\tau. \quad (\text{A.7})$$

A.2 Lichtkegelkoordinaten

$$\xi^\mu = (z, \bar{z}) = (\tau + \sigma, \tau - \sigma), \quad (\text{A.8})$$

$$\gamma_{z\bar{z}} = \gamma_{\bar{z}z} = \frac{1}{2}, \quad \text{d.h.} \quad \gamma_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.9})$$

$$\epsilon^{z\bar{z}} = -\epsilon^{\bar{z}z} = -\epsilon_{z\bar{z}} = \epsilon_{\bar{z}z} = 1, \quad \text{d.h.} \quad \frac{\epsilon^{\mu\nu}}{\sqrt{-\gamma}} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.10})$$

$$\epsilon_\mu{}^\nu = -\epsilon^\nu{}_\mu = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.11})$$

$$\sqrt{-\gamma} d^2\xi = \frac{1}{2} dz d\bar{z}. \quad (\text{A.12})$$

$$\gamma^{\mu\nu} + \frac{\epsilon^{\mu\nu}}{\sqrt{-\gamma}} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 4\delta_z^\mu \delta_{\bar{z}}^\nu, \quad (\text{A.13})$$

$$\gamma^{\mu\nu} - \frac{\epsilon^{\mu\nu}}{\sqrt{-\gamma}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = 4\delta_{\bar{z}}^\mu \delta_z^\nu. \quad (\text{A.14})$$

Anhang B

Konforme Transformationen

Wir betrachten konforme Transformationen in D Dimensionen

$$\gamma_{\mu\nu} = e^\sigma \hat{\gamma}_{\mu\nu}, \quad \gamma^{\mu\nu} = e^{-\sigma} \hat{\gamma}^{\mu\nu}, \quad \det\{\gamma_{\mu\nu}\} = \gamma = e^{D\sigma} \hat{\gamma}. \quad (\text{B.1})$$

Dabei transformieren sich die Christoffelsymbole gemäß

$$\Gamma_{\mu\nu}^\kappa = \hat{\Gamma}_{\mu\nu}^\kappa + \Delta \hat{\Gamma}_{\mu\nu}^\kappa = \hat{\Gamma}_{\mu\nu}^\kappa + \frac{1}{2} (\delta_\mu^\kappa \sigma_{,\nu} + \delta_\nu^\kappa \sigma_{,\mu} - \hat{\gamma}_{\mu\nu} \hat{\gamma}^{\kappa\alpha} \sigma_{,\alpha}). \quad (\text{B.2})$$

Die kovariante Ableitung transformiert sich nach

$$a_{\mu;\nu} = a_{\mu\uparrow\nu} - \frac{1}{2} (a_\mu \sigma_{,\nu} + a_\nu \sigma_{,\mu} - \hat{\gamma}_{\mu\nu} \sigma_{,\alpha} a^\alpha). \quad (\text{B.3})$$

„ ∂ “ bezeichnet die partielle Ableitung, „ $\hat{\partial}$ “ die kovariante Ableitung bezüglich $\gamma_{\mu\nu}$ und „ \uparrow “ die kovariante Ableitung bezüglich $\hat{\gamma}_{\mu\nu}$. Für den Laplace-Operator eines skalaren Feldes folgt daraus

$$\begin{aligned} \Delta a &= \gamma^{\alpha\beta} a_{;\alpha\beta} = e^{-\sigma} \hat{\gamma}^{\alpha\beta} \left(a_{\uparrow\alpha\beta} - \frac{1}{2} (a_{,\mu} \sigma_{,\nu} + a_{,\nu} \sigma_{,\mu} - \hat{\gamma}_{\mu\nu} \sigma_{,\alpha} a^\alpha) \right) \\ &= e^{-\sigma} \left(\hat{\Delta} a + \frac{D-2}{2} \sigma_{,\alpha} a^{,\alpha} \right). \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

In $D = 2$ Dimensionen haben wir also

$$\Delta a = e^{-\sigma} \hat{\Delta} a. \quad (\text{B.5})$$

Für den Riemannschen Krümmungstensor gilt

$$\begin{aligned} R^\mu{}_{\nu\kappa\lambda} &= \hat{R}^\mu{}_{\nu\kappa\lambda} + \Delta R^\mu{}_{\nu\kappa\lambda} \\ &= \hat{R}^\mu{}_{\nu\kappa\lambda} + \Delta \Gamma_{\nu\lambda\uparrow\kappa}^\mu - \Delta \Gamma_{\nu\kappa\uparrow\lambda}^\mu + \Delta \Gamma_{\kappa\alpha}^\mu \Delta \Gamma_{\nu\lambda}^\alpha - \Delta \Gamma_{\lambda\alpha}^\mu \Delta \Gamma_{\nu\kappa}^\alpha. \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Unter Benutzung von (B.2) ergibt sich hieraus

$$\begin{aligned}\Delta R^\mu{}_{\nu\kappa\lambda} &= \frac{1}{2} \left(\delta_\lambda^\mu \sigma_{\uparrow\nu\kappa} - \delta_\kappa^\mu \sigma_{\uparrow\nu\lambda} + \hat{\gamma}_{\nu\kappa} \sigma_{\uparrow\lambda}^\mu - \hat{\gamma}_{\nu\lambda} \sigma_{\uparrow\kappa}^\mu \right) + \\ &+ \frac{1}{4} (\delta_\lambda^\mu \hat{\gamma}_{\nu\kappa} - \delta_\kappa^\mu \hat{\gamma}_{\nu\lambda}) \sigma_{,\alpha} \sigma^{,\alpha} + \\ &+ \frac{1}{4} (\delta_\kappa^\mu \sigma_{,\nu} \sigma_{,\lambda} - \delta_\lambda^\mu \sigma_{,\nu} \sigma_{,\kappa} + \hat{\gamma}_{\nu\lambda} \sigma_{,\mu} \sigma_{,\kappa} - \hat{\gamma}_{\nu\lambda} \sigma_{,\mu} \sigma_{,\lambda}) . \quad (\text{B.7})\end{aligned}$$

Für den Ricci-Tensor finden wir

$$R_{\mu\nu} = \hat{R}_{\mu\nu} - \frac{D-2}{2} \sigma_{\uparrow\mu\nu} - \frac{1}{2} \hat{\gamma}_{\mu\nu} \hat{\Delta} \sigma + \frac{D-2}{4} \sigma_{,\mu} \sigma_{,\nu} - \frac{D-2}{4} \hat{\gamma}_{\mu\nu} \sigma_{,\alpha} \sigma^{,\alpha}, \quad (\text{B.8})$$

und in $D = 2$ Dimensionen

$$R_{\mu\nu} = \hat{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \hat{\gamma}_{\mu\nu} \hat{\Delta} \sigma = \frac{1}{2} \hat{\gamma}_{\mu\nu} (\hat{R} - \hat{\Delta} \sigma). \quad (\text{B.9})$$

Schließlich transformiert sich der Krümmungsskalar nach

$$R = e^{-\sigma} \left(\hat{R} - (D-1) \hat{\Delta} \sigma - \frac{(D-1)(D-2)}{4} \sigma_{,\alpha} \sigma^{,\alpha} \right), \quad (\text{B.10})$$

d.h. in $D = 2$ Dimensionen

$$R = e^{-\sigma} (\hat{R} - \hat{\Delta} \sigma). \quad (\text{B.11})$$

Anhang C

Die Eichung des Wess-Zumino-Terms

In diesem Abschnitt wird untersucht, wie der Wess-Zumino-Term (2.2)

$$I_{\text{WZ}} = \frac{1}{12\pi} \int_B \text{tr} (g^{-1} dg \wedge g^{-1} dg \wedge g^{-1} dg)$$

nach einer Untergruppe H der Gruppe G geeicht werden kann. Der Wess-Zumino-Term ist invariant unter globalen Rechts- und Linksmultiplikationen (2.3) bzw. (2.11), (2.13). Die Variation des Wess-Zumino-Terms bei einer infinitesimalen lokalen Eichtransformation (2.13)

$$\delta I_{\text{WZ}} = \frac{1}{4\pi} \int_B \text{tr} (g^{-1} dg \wedge g^{-1} dg \wedge \delta (g^{-1} dg)) \quad (\text{C.1})$$

läßt sich unter Berücksichtigung der Identitäten

$$dg^{-1} = -g^{-1} dg g^{-1}, \quad \delta (g^{-1} dg) = g^{-1} d (\delta g g^{-1}) g \quad (\text{C.2})$$

als Integral eines exakten Differentials schreiben und mit Hilfe des Stokeschen Satzes für Differentialformen in ein Integral über den physikalischen Raum $M = \partial B$ umwandeln:

$$\begin{aligned} \delta I_{\text{WZ}} &= -\frac{1}{4\pi} \int_B \text{tr} (dg \wedge dg^{-1} \wedge d (\delta g g^{-1})) \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_B d \text{tr} (g dg^{-1} \wedge d (\delta g g^{-1})) \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_M \text{tr} (g dg^{-1} \wedge d (\delta g g^{-1})) . \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

Durch Einsetzen der Eichvariation (2.13) erhalten wir nach einigen Umformungen, darunter partiellen Integrationen,

$$\delta I_{\text{WZ}} = \frac{1}{4\pi} \int_M \text{tr} (L'(\text{d}\delta h) \wedge \text{d}g g^{-1} + R'(\text{d}\delta h) \wedge g^{-1} \text{d}g). \quad (\text{C.4})$$

Wegen des Transformationsverhaltens des Eichfeldes A_μ (2.15) kann diese Variation durch

$$I_1 = \frac{1}{4\pi} \int_M \text{tr} (L'(A) \wedge \text{d}g g^{-1} + R'(A) \wedge g^{-1} \text{d}g), \quad A = A_\mu \text{d}x^\mu \quad (\text{C.5})$$

kompensiert werden. Unter der infinitesimalen Eichtransformation (2.13) liefert dieses Integral aber neben den δI_{WZ} kompensierenden Termen noch weitere

$$\begin{aligned} \delta I_1 = & -\delta I_{\text{WZ}} + \frac{1}{4\pi} \int_M \text{tr} (L'(A) \wedge g R'(\text{d}\delta h) g^{-1} + L'(\text{d}\delta h) \wedge g R'(A) g^{-1}) + \\ & + \frac{1}{4\pi} \int_M \text{tr} (R'(A) \wedge R'(\text{d}\delta h) - L'(A) \wedge L'(\text{d}\delta h)). \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

Das erste neu entstandene Integral kann durch den Beitrag I_2 kompensiert werden

$$I_2 = \frac{1}{4\pi} \int_M \text{tr} (L'(A) \wedge g R'(A) g^{-1}). \quad (\text{C.7})$$

Das zweite neu entstandene Integral läßt sich durch einen weiteren Beitrag nicht kompensieren, so daß der Wess-Zumino-Term nur dann eichbar ist, wenn es aufgrund der Eigenschaft der Abbildungen L und R ¹

$$\text{tr} (R' \otimes R' - L' \otimes L') = 0 \quad (\text{C.8})$$

verschwindet. Der Beitrag I_2 liefert bei der Eichvariation (2.13) keine zusätzlichen Terme, so daß diese im Text bereits unter (2.19) genannte Bedingung notwendig und hinreichend für die Eichbarkeit des Wess-Zumino-Terms ist. Der geeichte Wess-Zumino-Term lautet insgesamt

$$\begin{aligned} I_{\text{WZ, geeicht}} = & I_{\text{WZ}} + \\ & + \frac{1}{4\pi} \int_M \text{tr} (L'(A) \wedge \text{d}g g^{-1} + R'(A) \wedge g^{-1} \text{d}g + L'(A) \wedge g R'(A) g^{-1}). \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

¹Gemeint ist damit $\text{tr}(R'(X)R'(Y) - L'(X)L'(Y)) = 0$ für alle $X, Y \in \text{Lie}(H)$.

Anhang D

Eine Relation zwischen Determinanten

In diesem Anhang soll die f -Abhängigkeit der Determinante

$$\text{Det}^{(2)}(-e^f M), \quad M = \begin{pmatrix} \partial^2 + \partial^\mu g \partial_\mu & \epsilon^{\mu\nu} \partial_\mu g \partial_\nu \\ -\epsilon^{\mu\nu} \partial_\mu g \partial_\nu & \partial^2 + \partial^\mu g \partial_\mu \end{pmatrix} \quad (\text{D.1})$$

berechnet werden. Die Funktionen $f(\xi)$ und $g(\xi)$ sollen dabei beliebig sein, wobei wir annehmen, daß $e^f M$ ein negatives Spektrum besitzt. Das Verfahren orientiert sich an [53, 54].

Wir gehen aus von der Identität

$$\ln \text{Det}^{(2)}(-e^f M) = \text{Tr} \ln(-e^f M). \quad (\text{D.2})$$

Für eine beliebige komplexe Zahl λ mit positivem Realteil gilt

$$\ln \lambda = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(- \int_{\epsilon}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{dt}{t} - \ln \epsilon - C \right). \quad (\text{D.3})$$

Hier ist C die Eulersche Konstante ($C = 0.57721 \dots$), die für uns aber ohne Belang sein wird. (D.3) gilt auch für die Eigenwerte des Operators $-e^f M$, und falls dieser Diagonalform hat, sehen wir

$$\ln(-e^f M) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(- \int_{\epsilon}^{\infty} e^{e^f M t} \frac{dt}{t} - \ln \epsilon - C \right). \quad (\text{D.4})$$

Diese Gleichung ist aber invariant unter Basis-Transformationen. Deshalb gilt sie auch für nichtdiagonale Operatoren. Nun bilden wir die Spur

$$\mathrm{Tr} \ln(-e^f M) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(- \int_{\epsilon}^{\infty} \mathrm{Tr} e^{e^f M t} \frac{dt}{t} + \mathrm{const} \right). \quad (\mathrm{D.5})$$

und variieren $f(\xi)$

$$\begin{aligned} \delta \mathrm{Tr} \ln(-e^f M) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[- \int_{\epsilon}^{\infty} dt \mathrm{Tr} \left(e^{e^f M t} e^f M \delta f \right) \right] \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[- \mathrm{Tr} \left(e^{e^f M t} (e^f M)^{-1} \Big|_{\epsilon}^{\infty} e^f M \delta f \right) \right] \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathrm{Tr} \left(e^{e^f M \epsilon} \delta f \right) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int d^2 \xi \mathrm{tr} \langle \xi | e^{e^f M \epsilon} | \xi \rangle \delta f(\xi). \end{aligned} \quad (\mathrm{D.6})$$

Um $\langle \xi | e^{e^f M \epsilon} | \xi \rangle$ zu berechnen, fügen wir den Identitätsoperator in der Impulsbasis $|k\rangle$ ein

$$\langle \xi | e^{e^f M \epsilon} | \xi \rangle = \int d^2 k \langle \xi | e^{e^f M \epsilon} | k \rangle \langle k | \xi \rangle. \quad (\mathrm{D.7})$$

Setzen wir die konkrete Form des Operators M (D.1) ein und benutzen

$$\partial_{\mu} |k\rangle = |k\rangle (\partial_{\mu} + i k_{\mu}), \quad (\mathrm{D.8})$$

so erhalten wir

$$\langle \xi | e^{e^f M \epsilon} | \xi \rangle = \int d^2 k \langle \xi | k \rangle \langle k | \xi \rangle \exp(\epsilon e^f N) 1 = \frac{1}{4\pi^2} \int d^2 k \exp(\epsilon e^f N) 1, \quad (\mathrm{D.9})$$

wobei N der aus M durch (D.8) erzeugte Operator ist. Mit den Abkürzungen

$$(ab) \equiv a^{\mu} b_{\mu}, \quad a \times b \equiv \epsilon^{\mu\nu} a_{\mu} b_{\nu}, \quad (a, b \in \{k, \partial\}) \quad (\mathrm{D.10})$$

$$\mathbb{I}_2 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\mathrm{D.11})$$

wird

$$N = \mathbb{I}_2 (\partial^2 + 2i(k\partial) - k^2 + (\partial g \partial) + i(k\partial g)) + I (\partial g \times \partial + \partial g \times i k). \quad (\mathrm{D.12})$$

Die k -Integration in Gleichung (D.9) ist formal betrachtet eine Gaußsche (der Exponent ist ein quadratisches Polynom in k), jedoch ist bei ihrer Ausführung Vorsicht geboten wegen der im Exponenten auftretenden nicht kommutierenden Operatoren. Da wir nicht das vollständige Ergebnis des Integrals benötigen, sondern nur die Terme, die im Limes $\epsilon \rightarrow 0$ nicht verschwinden, entwickeln wir das Integral nach Potenzen von ϵ . Dazu skalieren wir k , so daß der in k quadratische Term unabhängig von ϵ wird:

$$k \rightarrow \frac{k}{\sqrt{\epsilon}} \quad (\text{D.13})$$

und zerlegen den Exponenten in einen bezüglich k quadratischen Operator A und einen in k linearen Operator B . Das Ergebnis lautet

$$\langle \xi | e^{e^f M \epsilon} | \xi \rangle = \frac{1}{4\pi^2 \epsilon} \int d^2 k \exp(A + B) 1, \quad (\text{D.14})$$

wobei

$$\begin{aligned} A \equiv -k^2 e^f \mathbb{I}_2, \quad B \equiv & \mathbb{I}_2 e^f \sqrt{\epsilon} (\sqrt{\epsilon} \partial^2 + 2i(k\partial) + \sqrt{\epsilon}(\partial g \partial) + i(k\partial g)) + \\ & + I e^f \sqrt{\epsilon} (\sqrt{\epsilon} \partial g \times \partial + \partial g \times i k). \end{aligned} \quad (\text{D.15})$$

Wir erkennen aus Gleichung (D.14), daß im Limes $\epsilon \rightarrow 0$ nur die Terme $\mathcal{O}(1)$, $\mathcal{O}(\sqrt{\epsilon})$ und $\mathcal{O}(\epsilon)$ beitragen. Um diese Terme auszurechnen, spalten wir den quadratischen Teil des Exponenten mit Hilfe der Baker-Campbell-Hausdorff-Formel [55, 56, 57, 58, 59] ab:

$$e^{A+B} = e^A e^C, \quad \text{mit } C = B - \frac{1}{2}[A, B] + \frac{1}{6}[A, [A, B]] + \frac{1}{12}[B, [A, B]] + \dots \quad (\text{D.16})$$

Die Kommutatoren ergeben sich zu

$$\begin{aligned} [A, B] &= \epsilon k^2 e^{2f} \left(\mathbb{I}_2 \left((\partial f)^2 + \partial^2 f + 2(\partial f \partial) + (\partial g \partial f) + 2i \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} (k \partial f) \right) + \right. \\ &\quad \left. I \partial g \times \partial f \right) \\ [A, [A, B]] &= 2\epsilon k^4 e^{3f} (\partial f)^2 \mathbb{I}_2 \\ [B, [A, B]] &= -4\epsilon k^2 e^{3f} \mathbb{I}_2 ((k\partial)^2 f + 2(k\partial f)^2) + \mathcal{O}(\sqrt{\epsilon}^3) \end{aligned} \quad (\text{D.17})$$

Die höheren Kommutatoren verschwinden entweder unmittelbar oder sind von der Ordnung $\mathcal{O}(\sqrt{\epsilon}^3)$, wodurch sie für uns irrelevant sind. Jetzt können

wir

$$\langle \xi | e^{e^f M \epsilon} | \xi \rangle = \frac{1}{4\pi^2 \epsilon} \int d^2 k e^A e^C 1 \quad (D.18)$$

nach Potenzen von ϵ entwickeln, indem e^C entwickelt wird:

$$e^C = \mathbb{I}_2 + C + \frac{1}{2} C^2 + \mathcal{O}(\sqrt{\epsilon^3}). \quad (D.19)$$

Nach Ausführen der Gaußschen Integrationen und Zusammenfassen der Terme erhalten wir schließlich

$$\langle \xi | e^{e^f M \epsilon} | \xi \rangle = \frac{\mathbb{I}_2}{4\pi \epsilon} e^{-f} + \frac{\mathbb{I}_2}{24\pi} (\partial^2 f - 3\partial^2 g). \quad (D.20)$$

Damit wird aus Gleichung (D.6)

$$\delta \text{Tr} \ln(-e^f M) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int d^2 \xi \delta f(\xi) \left(\frac{e^{-f}}{2\pi \epsilon} + \frac{1}{12\pi} (\partial^2 f - 3\partial^2 g) \right). \quad (D.21)$$

Im weiteren lassen wir das Symbol „ $\lim_{\epsilon \rightarrow 0}$ “ weg und verstehen alle Gleichungen mit diesem Grenzübergang. Wir können Gleichung (D.21) funktional integrieren und finden

$$\begin{aligned} \text{Tr} \ln(-e^f M) - \text{Tr} \ln(-M) &= \int d^2 \xi \left(-\frac{e^{-f}}{2\pi \epsilon} - \frac{1}{24\pi} (\partial f)^2 + \frac{1}{4\pi} (\partial f \partial g) \right) \Big|_{f \equiv 0}^f \\ &= -\int d^2 \xi \left(\frac{e^{-f} - 1}{2\pi \epsilon} + \frac{1}{24\pi} (\partial f)^2 - \frac{1}{4\pi} (\partial f \partial g) \right). \end{aligned} \quad (D.22)$$

Im Sinne einer Regularisierung ersetzen wir den divergenten Ausdruck $1/\epsilon$ durch eine positive Konstante $\mu^2/6$. Mit Hilfe der Gleichung (D.2) erhalten wir dann die folgende Relation zwischen den Determinanten $\text{Det}^{(2)}(-e^f M)$ und $\text{Det}^{(2)}(-M)$

$$\frac{\text{Det}^{(2)}(-e^f M)}{\text{Det}^{(2)}(-M)} = \exp \left(-\frac{1}{12\pi} \int d^2 \xi \left(\frac{1}{2} (\partial f)^2 - 3(\partial f \partial g) + \mu^2 (e^{-f} - 1) \right) \right). \quad (D.23)$$

Für die Eliminierung des Eichfeldes mittels Pfadintegration benötigen wir im Abschnitt 2.5 noch eine ähnliche Relation für den Laplace-Operator.

Insbesondere geht es um die Abhängigkeit der Determinante des Laplace-Operators vom konformen Faktor e^σ , wenn die Metrik die Gestalt

$$g_{\mu\nu} = e^\sigma \delta_{\mu\nu} \quad (\text{D.24})$$

hat. Dann hat gemäß Gleichung (B.5) der Laplace-Operator die Form

$$\Delta = e^{-\sigma} \partial^2. \quad (\text{D.25})$$

Nun sehen wir am Operator M , daß seine Matrixform für $g \equiv 0$ zerfällt. Daher gilt

$$\text{Det}^{(2)}(-e^f M) \Big|_{g \equiv 0} = \left(\text{Det}^{(1)}(-e^f \partial^2) \right)^2. \quad (\text{D.26})$$

Wir erhalten mit (D.23) somit eine Relation für den Operator Δ

$$\frac{\text{Det}^{(1)}(-\Delta)}{\text{Det}^{(1)}(-\partial^2)} = \frac{\text{Det}^{(1)}(-e^{-\sigma} \partial^2)}{\text{Det}^{(1)}(-\partial^2)} = \exp \left(-\frac{1}{24\pi} \int d^2\xi \left(\frac{(\partial\sigma)^2}{2} + \mu^2 (e^\sigma - 1) \right) \right). \quad (\text{D.27})$$

Diese stimmt mit der konformen Anomalie freier Felder in zwei Dimensionen überein

$$\begin{aligned} \int \mathcal{D}_{e^\sigma \delta} \phi \exp \left(-\frac{1}{2} \int (\partial\phi)^2 e^\sigma d^2\xi \right) &= \int \mathcal{D}_\delta \phi \exp \left(-\frac{1}{2} \int (\partial\phi)^2 d^2\xi \right) \cdot \\ &\cdot \exp \left(\frac{1}{48\pi} \int d^2\xi \left(\frac{(\partial\sigma)^2}{2} + \mu^2 (e^\sigma - 1) \right) \right). \end{aligned} \quad (\text{D.28})$$

Anhang E

Näherungsweise Pfadintegralberechnung des geeichten Wess-Zumino- Novikov-Witten-Modells

In diesem Anhang werden wir die im Abschnitt 2.5 umrissene Eliminierung des Eichfeldes des geeichten $SL(2, \mathbb{R})/U(1)$ -WZNW-Modells mittels Pfadintegration über zwei skalare Hilfsfelder konkretisieren. Im ersten Abschnitt wird diese Eliminierung auf die Berechnung einer Funktionaldeterminante zurückgeführt. Im zweiten Abschnitt wird untersucht, ob durch dieses Vorgehen die als exakt vermuteten Formen der Metrik und des Dilatons der Arbeiten [22, 25, 26] reproduziert werden können. Da sich die Funktionaldeterminante bisher einer vollständigen Berechnung entzogen hat, wollen wir versuchen, mit plausiblen Annahmen weiterzukommen.

E.1 Ausintegration des Eichfeldes

Wir gehen von dem Funktionalintegral (2.90) aus. Für konkrete Rechnungen müssen wir der Funktionaldeterminante $\text{Det}^{(3)}G_0$ einen Sinn geben. Da G_0 (2.80) ein matrixförmiger multiplikativer Operator ist, schreiben wir seine Funktionaldeterminante formal als Produkt der gewöhnlichen Determinante $\det(G_{0,mn}(\xi))$ über alle Raum-Zeit-Punkte ξ , wobei wir gleich den für unsere

Zwecke benötigten Absolutbetrag bilden

$$\begin{aligned} \left| \text{Det}^{(3)} G_0 \right| &= \text{Det}^{(1)} |\det (G_{0,mn}(\xi))| \\ &= \prod_{\xi} |\det (G_{0,mn}(\xi))| = \prod_{\xi} 4 \sinh^2 r(\xi) \cosh^2 r(\xi). \end{aligned} \quad (\text{E.1})$$

Hierbei soll \prod_{ξ} ein reparametrisierungsinvariantes Produkt über alle Punkte der Weltfläche darstellen, wie beispielsweise

$$\prod_{\xi} f(\xi) \equiv \exp \left(\mu_0^2 \int_M \ln f(\xi) \sqrt{\gamma} d^2 \xi \right), \quad (\text{E.2})$$

wobei μ_0 ein unbestimmter Parameter mit der Dimension einer Masse ist. Diese Determinante soll sicherstellen, daß das Maß im Zustandsintegral (2.78) unter den Feldtransformationen

$$x'^m = x'^m(x^n), \quad G'_{0,mn} = G_{0,kl} \frac{\partial x^k}{\partial x'^m} \frac{\partial x^l}{\partial x'^n} \quad x'^m = (r', t', \alpha'), \quad x^n = (r, t, \alpha), \quad (\text{E.3})$$

invariant bleibt. Diese Transformationen entsprechen Koordinatentransformationen im Targetraum. Die Maße $\mathcal{D}r$, $\mathcal{D}t$, $\mathcal{D}\alpha$ und $\mathcal{D}A$ des Zustandsintegrals (2.78) leiten sich aus den Funktionenabständen

$$\begin{aligned} \|\delta r\|^2 &= \int_M (\delta r)^2 \sqrt{\gamma} d^2 \xi, \quad (\gamma = \det \gamma_{\mu\nu}) \\ \|\delta t\|^2 &= \int_M (\delta t)^2 \sqrt{\gamma} d^2 \xi, \\ \|\delta \alpha\|^2 &= \int_M (\delta \alpha)^2 \sqrt{\gamma} d^2 \xi, \\ \|\delta A\|^2 &= \int_M \gamma^{mn} \delta A_m \delta A_n \sqrt{\gamma} d^2 \xi \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

ab und sind invariant unter Reparametrisierungen der Weltfläche

$$\xi'^m = \xi'^m(\xi^k). \quad (\text{E.5})$$

Mit Ausnahme von $||\delta A||$ sind die Funktionenabstände (E.4) aber nicht invariant bei konformen Transformationen (B.1), so daß zu erwarten ist, daß auch das Zustandsintegral nicht invariant unter diesen Transformationen ist.

Nach der Ausintegration der Felder ϕ und χ muß im Zustandsintegral der resultierenden Theorie die Funktionaldeterminante $\text{Det}^{(2)}G$ stehen, wobei G hier die noch unbekannte, zu berechnende Targetraum-Metrik ist. Um das zu erreichen, führen wir die noch unbestimmte Funktion Q ein

$$e^{2Q(\xi)} \equiv \frac{|\det G_0|}{\det G} \Rightarrow \sqrt{|\text{Det}^{(3)}G_0|} = \text{Det}^{(1)}(e^Q) \sqrt{\text{Det}^{(2)}G}, \quad (\text{E.6})$$

für die später, nachdem berechnet wurde, wie G von G_0 und Q abhängt, die Gleichung (E.6) zur Bestimmungsgleichung wird. Auf diese Weise haben wir den gewünschten, jedoch unbekannten Faktor $\text{Det}^{(2)}G$ aus $I[\gamma, r]$ absepariert

$$I[\gamma, r] = \sqrt{\text{Det}^{(2)}G} \tilde{I}[\gamma, r] \quad (\text{E.7})$$

und erhalten

$$\begin{aligned} \tilde{I}[\gamma, r] &\equiv \text{Det}^{(1)}(-\Delta) \times \\ &\int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\chi \text{Det}^{(1)}(e^Q) \exp \left(- \int (\phi(\xi), \chi(\xi)) M \begin{pmatrix} \phi(\xi) \\ \chi(\xi) \end{pmatrix} \sqrt{\gamma} d^2\xi \right) \end{aligned} \quad (\text{E.8})$$

Den Teil des Integranden $\text{Det}^{(1)}(e^Q)$ berücksichtigen wir durch die Einführung neuer Maße $\tilde{\mathcal{D}}\phi$ und $\tilde{\mathcal{D}}\chi$

$$\begin{aligned} ||\delta\phi||_{\sim}^2 &\equiv \int \sqrt{\gamma} e^{Q(\xi)} (\delta\phi(\xi))^2 \Rightarrow \tilde{\mathcal{D}}\phi = \mathcal{D}\phi \sqrt{\text{Det}^{(1)}(e^Q)} \\ ||\delta\chi||_{\sim}^2 &\equiv \int \sqrt{\gamma} e^{Q(\xi)} (\delta\chi(\xi))^2 \Rightarrow \tilde{\mathcal{D}}\chi = \mathcal{D}\chi \sqrt{\text{Det}^{(1)}(e^Q)}, \end{aligned} \quad (\text{E.9})$$

so daß

$$\tilde{I}[\gamma, r] = \text{Det}^{(1)}(-\Delta) \int \tilde{\mathcal{D}}\phi \tilde{\mathcal{D}}\chi \exp \left(- \int (\phi(\xi), \chi(\xi)) M \begin{pmatrix} \phi(\xi) \\ \chi(\xi) \end{pmatrix} \sqrt{\gamma} d^2\xi \right). \quad (\text{E.10})$$

Wir untersuchen nun die Abhängigkeit dieses Integrals von der Weltflächenmetrik

$$\gamma_{\mu\nu} = e^{\sigma(\xi)} \hat{\gamma}_{\mu\nu}. \quad (\text{E.11})$$

und wählen den konformen Faktor e^σ mittels Reparametrisierung so, daß die Referenzmetrik lokal kartesisch wird

$$\hat{\gamma}_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}. \quad (\text{E.12})$$

Die Funktionenabstände (E.9) werden dann zu

$$||\delta\phi||_\sim^2 = \int d^2\xi e^{\sigma(\xi)+Q(\xi)} (\delta\phi(\xi))^2, \quad ||\delta\chi||_\sim^2 \equiv \int d^2\xi e^{\sigma(\xi)+Q(\xi)} (\delta\chi(\xi))^2. \quad (\text{E.13})$$

Um „kartesische“ Funktionenabstände zu erhalten, definieren wir

$$\tilde{\phi}(\xi) \equiv \phi(\xi) e^{(\sigma(\xi)+Q(\xi))/2}, \quad \tilde{\chi}(\xi) \equiv \chi(\xi) e^{(\sigma(\xi)+Q(\xi))/2}. \quad (\text{E.14})$$

Das liefert

$$||\delta\phi||_\sim^2 = \int d^2\xi \left(\delta\tilde{\phi}(\xi) \right)^2 \equiv ||\delta\tilde{\phi}||_0^2, \quad ||\delta\chi||_\sim^2 = \int d^2\xi \left(\delta\tilde{\chi}(\xi) \right)^2 \equiv ||\delta\tilde{\chi}||_0^2. \quad (\text{E.15})$$

Aus dem Funktionalintegral (E.10) wird daher

$$\begin{aligned} \tilde{I}[\gamma, r] = \text{Det}^{(1)}(-e^{-\sigma}\partial^2) \int \mathcal{D}_0\tilde{\phi} \mathcal{D}_0\tilde{\chi} \exp \left(- \int (\tilde{\phi}(\xi), \tilde{\chi}(\xi)) e^{-(\sigma(\xi)+Q(\xi))/2} \times \right. \\ \left. M e^{-(\sigma(\xi)+Q(\xi))/2} \begin{pmatrix} \tilde{\phi}(\xi) \\ \tilde{\chi}(\xi) \end{pmatrix} d^2\xi \right). \end{aligned} \quad (\text{E.16})$$

Das hier auftretende Gaußsche Integral läßt sich formal durch eine Determinante ausdrücken

$$\tilde{I}[\gamma, r] = \text{Det}^{(1)}(-e^{-\sigma}\partial^2) \left[\text{Det}^{(2)}(e^{-(\sigma(\xi)+Q(\xi))} M) \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (\text{E.17})$$

Zur weiteren Behandlung klammern wir aus dem Operator M einen Faktor aus, um ihn auf einen Laplace-ähnlichen Operator M' zurückzuführen. Wir erhalten dann

$$\ln \tilde{I}[\gamma, r] = \ln \text{Det}^{(1)}(-e^{-\sigma}\partial^2) - \frac{1}{2} \ln \text{Det}^{(2)}(e^{-\sigma(\xi)-Q(\xi)+g(\xi)} M'). \quad (\text{E.18})$$

Mit Hilfe der im Anhang D angegebenen Beziehungen kann die Abhängigkeit dieses Ausdrucks von den Faktoren vor den Operatoren ∂^2 und M' berechnet

werden mit dem Ergebnis

$$\begin{aligned}
\ln \tilde{I}[\gamma, r] &= \ln \text{Det}^{(1)}(-\partial^2) - \frac{1}{2} \ln \text{Det}^{(2)}(M') + \\
&+ \frac{1}{4\pi\epsilon} \int d^2\xi e^\sigma (e^{Q-g} - 1) - \frac{1}{24\pi} \int d^2\xi (Q + 2g) \partial^2 \sigma + \\
&+ \frac{1}{48\pi} \int d^2\xi (\partial_\mu Q \partial^\mu Q + 4\partial_\mu Q \partial^\mu g - 5\partial_\mu g \partial^\mu g). \quad (\text{E.19})
\end{aligned}$$

An dieser Stelle werden wir den Ausdruck nur qualitativ weiterdiskutieren. Eine konkrete Weiterführung der Rechnung ist im nächsten Abschnitt zu finden. Die σ -Abhängigkeit ist in (E.19) explizit, da $\text{Det}^{(2)}(M')$ nur von $r(\xi)$ abhängt. Aus ihr können wir entnehmen, daß das erste Integral einen Beitrag zum Tachyon-Term der Wirkung (1.5) liefert, das zweite Integral einen Beitrag zum Dilaton, während das Integral in der dritten Zeile eine Korrektur zur Targetraum-Metrik ergibt. Zur vollständigen Bestimmung von $\tilde{I}[\gamma, r]$ fehlt allerdings die Berechnung von $\text{Det}^{(2)}(M')$. Dies erweist sich aber als schwierig für beliebig vorgegebenes $r(\xi)$. Die Methoden des Anhangs D sind hier nicht anwendbar, weil die Abhängigkeit des Operators M' von $g(\xi)$ komplizierter ist als bei einem reinen Vorfaktor.

E.2 Vergleich mit Ergebnissen aus der Literatur

Aus dem vorangegangenen Abschnitt ergibt sich die Wirkung nach Eliminierung des Eichfeldes A_μ zu

$$S'_{\text{WZNW, geeicht}}[\gamma, r, t] = S_{\text{WZNW, geeicht}}[\gamma, r, t] - \ln \tilde{I}[\gamma, r]. \quad (\text{E.20})$$

Wenn wir Gleichung (E.19) für $\tilde{I}[\gamma, r]$ kovariant formulieren (vgl. Anhang B) und wie im Anhang D $1/\epsilon$ durch $\mu^2/6$ ersetzen, erhalten wir

$$\begin{aligned}
\ln \tilde{I}[\gamma, r] &= \ln \text{Det}^{(1)}(-\partial^2) - \frac{1}{2} \ln \text{Det}^{(2)}(M') + \\
&+ \frac{\mu^2}{24\pi} \int d^2\xi \sqrt{\gamma} (e^{Q-g} - 1) + \frac{1}{24\pi} \int d^2\xi \sqrt{\gamma} (Q + 2g) R + \\
&+ \frac{1}{48\pi} \int d^2\xi \sqrt{\gamma} (\partial_\mu Q \partial^\mu Q + 4\partial_\mu Q \partial^\mu g - 5\partial_\mu g \partial^\mu g). \quad (\text{E.21})
\end{aligned}$$

Da der Operator M' nur von dem Feld $r(\xi)$ abhängt, ist auch $\text{Det}^{(2)}(M')$ ausschließlich von $r(\xi)$ abhängig. Auch die Metrik $G_{0,mn}$ hängt nur von r ab. Dann sollte Q auch nur von r abhängen

$$Q = Q(r). \quad (\text{E.22})$$

Da wir die Determinante nicht exakt berechnen können, machen wir die folgende *Annahme*: $\text{Det}^{(2)}(M')$ sei gegeben durch das Exponential einer Wirkung für das Feld $r(\xi)$:

$$\ln \text{Det}^{(2)}(M') \approx \frac{1}{2\pi} \int d^2\xi \sqrt{\gamma} h(r) \gamma^{\mu\nu} \partial_\mu r \partial_\nu r. \quad (\text{E.23})$$

Wir setzen dabei nur Gleichheit bis auf Terme voraus, die für die Identifikation mit einem Sigma-Modell keine Bedeutung haben. Ein Term, der den Krümmungsskalar R enthält, ist ausgeschlossen, weil in der gewählten konformen Eichung (D.24) M' von σ nicht abhängt.

Setzen wir (E.21), (E.22) und (E.23) in (E.20) ein, so erhalten wir ein verallgemeinertes Sigma-Modell

$$\begin{aligned} S'_{\text{WZNW, geeicht}}[\gamma, r, t] &= \frac{k}{4\pi} \int d^2\xi \sqrt{\gamma} \gamma^{\mu\nu} G_{mn}(r) \partial_\mu x^m \partial_\nu x^n - \\ &\quad - \frac{1}{8\pi} \int d^2\xi \sqrt{\gamma} (\Phi(r) R^{(2)} + T(r)) \end{aligned} \quad (\text{E.24})$$

Dabei sind

$$\begin{aligned} x^m &= (r, t), \\ G_{mn} &= \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{12k} (Q'(r)^2 + 4Q'(r)g'(r) - 5g'(r)^2) + \frac{1}{k}h(r) & 0 \\ 0 & \tanh^2 r \end{pmatrix}, \\ \Phi(r) &= \frac{1}{3} (Q(r) + 2g(r)), \quad T(r) = \frac{\mu^2}{3} (e^{Q-g} - 1), \end{aligned} \quad (\text{E.25})$$

und $T(r)$ ist das hier nicht weiter diskutierte Tachyonfeld. Aus der Definition von Q (E.6) erhalten wir eine Bestimmungsgleichung für $Q(r)$ bei vorgegebener Funktion $h(r)$:

$$e^{-2Q(r)} = e^{-2g} \left(1 - \frac{1}{12k} (Q'(r)^2 + 4Q'(r)g'(r) - 5g'(r)^2) + \frac{1}{k}h(r) \right). \quad (\text{E.26})$$

Wir wollen jetzt versuchen, die Wirkung (E.24) mit der in der Literatur [22, 25, 26] als exakt angenommenen Wirkung

$$S_{\text{WZNW, geeicht}}[r, t] = \frac{k' - 2}{4\pi} \int d^2\xi \sqrt{\gamma} \left((\partial\rho)^2 + \frac{\tanh^2 \rho}{1 - (2/k') \tanh^2 \rho} (\partial t)^2 \right) - \frac{1}{8\pi} \int d^2\xi \sqrt{\gamma} \ln \left(\cosh \rho \sqrt{\cosh^2 \rho - (2/k') \sinh^2 \rho} \right) R^{(2)} \quad (\text{E.27})$$

zu vergleichen. Hierbei wurden das neue Feld $\rho(r(\xi))$ und die neue Konstante k' eingeführt, um mögliche Unterschiede in den Feld- und Konstanten-Definitionen zu berücksichtigen. Wir wollen sehen, ob die Modelle (E.24, E.25) und (E.27) durch geeignete Wahl der Funktionen $h(r)$ und $Q(r)$ zu identifizieren sind. Folgende Gleichungen müssen dazu erfüllt sein

$$k - \frac{1}{12} (Q'(r)^2 + 4Q'(r)g'(r) - 5g'(r)^2) + h(r) = (k' - 2)\rho'(r)^2, \quad (\text{E.28})$$

$$k \tanh^2 r = (k' - 2) \frac{\tanh^2 \rho}{1 - (2/k') \tanh^2 \rho}, \quad (\text{E.29})$$

$$Q(r) + 2g(r) = 3 \ln \left(\cosh \rho \sqrt{\cosh^2 \rho - (2/k') \sinh^2 \rho} \right) + \Phi_0. \quad (\text{E.30})$$

$$e^{Q-g} - 1 = 0, \quad (\text{E.31})$$

In der Gleichung (E.30) wurde eine zusätzliche additive Konstante eingeführt, da das Dilaton nur bis auf eine solche Verschiebung eindeutig bestimmt ist. Die Identifikation der Tachyonen (E.31) führt mit $Q = g$ genau auf Wittens Ein-Schleifen-Approximation [15], die nicht mit (E.27) übereinstimmt. Versuchsweise lassen wir deshalb nachfolgend das Tachyonpotential außer acht. Dann sind die Gleichungen (E.28-E.30) zusammen mit der Konsistenzgleichung (E.26) zu lösen. Dabei können wir davon ausgehen, daß die Limites $r \rightarrow \infty$ und $\rho \rightarrow \infty$ zusammenfallen, da sie beide die asymptotisch flache Region der Metrik beschreiben. Setzen wir diesen Limes in die Gleichung (E.29) ein, so folgt

$$k = k'. \quad (\text{E.32})$$

Lösen wir Gleichung (E.29) nach $\sinh \rho$ auf

$$\sinh \rho = \sqrt{\frac{k}{k-2}} \sinh r \quad (\text{E.33})$$

und setzen das in (E.30) ein, erhalten wir

$$Q(r) = \frac{3}{2} \ln \left(1 + \frac{k}{k-2} \sinh^2 r \right) - \ln \cosh r + \Phi_0. \quad (\text{E.34})$$

Wenn wir andererseits die Funktion $h(r)$ aus (E.28) und (E.26) eliminieren, ergibt sich

$$Q(r) = 2 \ln \cosh r - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{k-2}{k} \rho'(r)^2 \right), \quad (\text{E.35})$$

und mit Gleichung (E.33) finden wir schließlich

$$Q(r) = \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{k}{k-2} \sinh^2 r \right) + \ln \cosh r. \quad (\text{E.36})$$

Die Resultate (E.34) und (E.36) widersprechen offenbar einander, d.h. wir können die Modelle (E.24, E.25) und (E.27) nicht miteinander identifizieren. Nun wissen wir aus der Literatur [60, 61], daß die Wirkung (E.27) die störungstheoretischen β -Funktionsgleichungen bis zur vierten Ordnung in $1/k$ erfüllt. Das scheint die hier durchgeführte Behandlung der Eichfeldeliminierung mittels Pfadintegration in Frage zu stellen. Dieser Schluß wäre jedoch etwas vorschnell. Wegen der Renormierungsschema-Abhängigkeit der höheren Glieder der β -Funktionen ist es nämlich möglich, daß zwei zunächst nicht identifizierbare Modelle gleichzeitig verschiedene Varianten der β -Funktionsgleichungen erfüllen. Es wäre interessant nachzuprüfen, ob (E.24) trotz seiner Verschiedenheit zum Modell (E.27) eine Variante der β -Funktionsgleichungen erfüllt. Das liegt zumindest im Bereich der Möglichkeiten, weil beide Modelle im klassischen Limes $k \rightarrow \infty$ ineinander übergehen. Das bedeutet, daß die vom Renormierungsschema unabhängigen β -Funktionsgleichungen erster Ordnung der Störungstheorie für beide Modelle erfüllt sind. Für eine vollständige Diskussion dieser Zusammenhänge wäre aber eine auf diesem Wege bisher nicht gelungene exakte Berechnung der Wirkung (E.24, E.25) notwendig. Für eine Bewertung der Ergebnisse dieses Anhangs scheint es also zu früh zu sein. Deshalb wurde in diesem Anhang auch großer Wert auf die Ausführlichkeit der Darstellung gelegt, so daß der Leser sich selbst ein Urteil über die getroffenen Annahmen und Näherungen bilden kann. Es bleibt abzuwarten, welche Ergebnisse die zukünftige Forschung in dieser Richtung erbringt.

Anhang F

Das Rechnen mit Poissonklammern

In diesem Anhang werden kurz einige Rechenregeln mit Poissonklammern zusammengestellt. Aus der Definition (3.30) sind sofort die Linearität

$$\{A + B, C\} = \{A, C\} + \{B, C\}, \quad \{A, B + C\} = \{A, B\} + \{A, C\}, \quad (\text{F.1})$$

und die Antisymmetrie

$$\{A, B\} = -\{B, A\} \quad (\text{F.2})$$

ableitbar. Eine weitere bekannte Eigenschaft ist die Jakobi-Identität

$$\{A, \{B, C\}\} = \{B, \{A, C\}\} + \{C, \{B, A\}\}. \quad (\text{F.3})$$

Wegen der Variationsableitungen in ihrer Definition (3.30) wirkt die Poissonklammer auf jeder Seite wie eine Ableitung. Deshalb gelten die entsprechenden Regeln, die Produktregel

$$\{AB, C\} = B \{A, C\} + A \{B, C\}, \quad \{A, BC\} = \{A, B\} C + \{A, C\} B, \quad (\text{F.4})$$

und die Kettenregel

$$\{f(A), B\} = f'(A) \{A, B\}, \quad \{A, f(B)\} = \{A, B\} f'(B). \quad (\text{F.5})$$

Die Eigenschaften (F.1) lassen sich in diesem Zusammenhang als Summenregel verstehen.

Wegen der Linearität (F.1) können Poissonklammern differenziert werden

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\partial A(\sigma, \tau)}{\partial \sigma}, B(\sigma', \tau) \right\} &= \frac{\partial}{\partial \sigma} \{A(\sigma, \tau), B(\sigma', \tau)\}, \\ \left\{ A(\sigma, \tau), \frac{\partial B(\sigma', \tau)}{\partial \sigma'} \right\} &= \frac{\partial}{\partial \sigma'} \{A(\sigma, \tau), B(\sigma', \tau)\}. \end{aligned} \quad (\text{F.6})$$

Obwohl die Poissonklammern immer bei gleicher Zeit τ betrachtet werden, gilt eine ähnliche Regel auch für die Ableitung einer Poissonklammer nach τ , wobei beim Beweis auf die kanonischen Bewegungsgleichungen (3.36) und die Jakobi-Identität (F.3) zurückgegriffen wird

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \{A(\sigma, \tau), B(\sigma', \tau)\} &= \{\{A(\sigma, \tau), B(\sigma', \tau)\}, H\} \\ &= \{A(\sigma, \tau), \{B(\sigma', \tau), H\}\} + \\ &\quad + \{\{A(\sigma, \tau), H\}, B(\sigma', \tau)\} \quad (\text{F.7}) \\ &= \left\{ A(\sigma, \tau), \frac{\partial B(\sigma', \tau)}{\partial \tau} \right\} + \left\{ \frac{\partial A(\sigma, \tau)}{\partial \tau}, B(\sigma', \tau) \right\}. \end{aligned}$$

Schließlich kann wegen der Linearität (F.1) aus der Poissonklammer einer Feldgröße auf die Poissonklammern der einzelnen Fouriermoden dieser Größe geschlossen werden.

Anhang G

Herleitung der Frei-Feld-Darstellungen aus dem Energie-Impuls-Tensor

In diesem Anhang wird gezeigt, daß aus dem Ansatz, die freien Felder seien lokale Ausdrücke in den (anti-) chiralen Funktionen $y_k(z)$ und $\bar{y}_k(\bar{z})$, explizite Darstellungen der freien Felder als Funktionen der $y_k(z)$, $\bar{y}_k(\bar{z})$ und Ableitungen folgen. Wir werden hierbei nur die chiralen Anteile betrachten, da für die antichiralen Funktionen das Vorgehen vollständig analog ist. Zur Vereinfachung der Sprechweise werden wir hier stets den Zusatz „chirale Komponente“ fortlassen. Wenn also im folgenden vom Energie-Impuls-Tensor und freien Feldern die Rede ist, dann sind immer die chiralen Komponenten derselben gemeint.

Wir beginnen mit der Identifizierung des Energie-Impuls-Tensors der freien Felder (3.73) mit dem Energie-Impuls-Tensor als Funktion der $y_k(z)$ (3.55)

$$T(z) = (\partial_z \phi_1)^2 + (\partial_z \phi_2)^2 = \frac{1}{\gamma^2} \frac{y_1'' y_2' - y_1' y_2''}{y_1 y_2' - y_1' y_2}. \quad (\text{G.1})$$

Durch Übergang zu den komplexen Feldern (3.78)

$$\phi = \phi_1 + i\phi_2, \quad \chi = \phi_1 - i\phi_2, \quad (\text{G.2})$$

faktoriisiert der Energie-Impuls-Tensor

$$T(z) = \partial_z \phi(z) \partial_z \chi(z). \quad (\text{G.3})$$

Der Lokalittsansatz lautet dann

$$\phi(z) = \phi(y_1(z), y_2(z), y'_1(z), y'_2(z)), \quad \chi(z) = \chi(y_1(z), y_2(z), y'_1(z), y'_2(z)). \quad (\text{G.4})$$

($\phi(z)$ oder $\chi(z)$ dürfen nicht von höheren als ersten Ableitungen der Funktionen $y_k(z)$ abhängen, weil wegen (G.3) der Energie-Impuls-Tensor dann im Gegensatz zu (G.1) von höheren als zweiten Ableitungen der $y_k(z)$ abhänge.) Wir sehen, daß der Energie-Impuls-Tensor linear von den zweiten Ableitungen $y''_k(z)$ abhängt. Daraus können wir schließen, daß nur eines der freien Felder $\phi(z)$, $\chi(z)$ von den Ableitungen $y'_k(z)$ abhängt. Da bisher $\phi(z)$ und $\chi(z)$ völlig symmetrisch in allen Gleichungen auftreten, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $\chi(z)$ nicht von den Ableitungen $y'_k(z)$ abhängt

$$\phi(z) = \phi(y_1(z), y_2(z), y'_1(z), y'_2(z)), \quad \chi(z) = \chi(y_1(z), y_2(z)). \quad (\text{G.5})$$

Zur Abkürzung lassen wir im weiteren Text das Argument z aller chiralen Funktionen fort.

Setzen wir den Ansatz (G.5) in (G.3) ein und vergleichen das Ergebnis mit der rechten Seite von (G.1), so erhalten wir durch Vergleich der Koeffizienten von y''_1 und y''_2 folgende Gleichungen (y_k und y'_k als Indizes bedeuten in diesem Anhang partielle Ableitungen nach diesen Groen)

$$\phi_{y'_1} (\chi_{y_1} y'_1 + \chi_{y_2} y'_2) = \frac{1}{\gamma^2} \frac{y'_2}{y_1 y'_2 - y'_1 y_2}, \quad (\text{G.6})$$

$$\phi_{y'_2} (\chi_{y_1} y'_1 + \chi_{y_2} y'_2) = -\frac{1}{\gamma^2} \frac{y'_1}{y_1 y'_2 - y'_1 y_2}, \quad (\text{G.7})$$

$$(\phi_{y_1} y'_1 + \phi_{y_2} y'_2) (\chi_{y_1} y'_1 + \chi_{y_2} y'_2) = 0. \quad (\text{G.8})$$

Dividieren wir Gleichung (G.6) durch (G.7), so erhalten wir nach einer Umformung die partielle Differentialgleichung

$$y'_1 \phi_{y'_1} + y'_2 \phi_{y'_2} = 0. \quad (\text{G.9})$$

Diese hat die allgemeine Lösung

$$\phi = \phi(y_1, y_2, y'_1/y'_2) = \phi(y_1, y_2, \xi), \quad (\text{G.10})$$

wobei

$$\xi = \frac{y'_1}{y'_2}. \quad (\text{G.11})$$

Wir setzen die Lösung (G.10) in die Gleichungen (G.6) und (G.7) ein

$$\phi_\xi (\chi_{y_1} \xi + \chi_{y_2}) = \frac{1}{\gamma^2} \frac{1}{y_1 - y_2 \xi}. \quad (\text{G.12})$$

Daraus schließen wir, daß $\chi_{y_1} \xi + \chi_{y_2}$ nicht identisch verschwindet (höchstens in Gebieten, in denen y_1 , y_2 oder ξ divergieren¹)

$$\chi_{y_1} \xi + \chi_{y_2} \neq 0. \quad (\text{G.13})$$

Aus Gleichung (G.8) ergibt sich deshalb

$$\phi_{y_1} \xi + \phi_{y_2} = 0. \quad (\text{G.14})$$

Diese Gleichung hat die allgemeine Lösung

$$\phi = \phi(y_1 - y_2 \xi, \xi). \quad (\text{G.15})$$

Wir wollen jetzt die aus (G.12) folgende Gleichung

$$\phi_\xi = \frac{1}{\gamma^2} \frac{1}{(\chi_{y_1} \xi + \chi_{y_2})(y_1 - y_2 \xi)} \quad (\text{G.16})$$

über ξ , das auf der rechten Seite explizit auftritt, integrieren. Hierzu müssen zwei Fälle unterschieden werden.

1. $\chi_{y_1} \xi + \chi_{y_2}$ und $y_1 - y_2 \xi$ sind als Funktionen von ξ zueinander proportional (mit einer von y_1 und y_2 abhängigen Funktion f als Proportionalitätsfaktor)

$$\chi_{y_1} \xi + \chi_{y_2} = f(y_1, y_2) (y_1 - y_2 \xi). \quad (\text{G.17})$$

Ein Koeffizientenvergleich bezüglich ξ liefert die beiden zu (G.17) äquivalenten Gleichungen

$$\chi_{y_1} = -f(y_1, y_2) y_2, \quad \chi_{y_2} = f(y_1, y_2) y_1. \quad (\text{G.18})$$

Diese Gleichungen implizieren die partielle Differentialgleichung

$$\chi_{y_1} y_1 + \chi_{y_2} y_2 = 0, \quad (\text{G.19})$$

¹Wir suchen hier eine Darstellung der freien Felder, die die Gleichung (G.1) identisch erfüllt unabhängig von den Werten, die die Funktionen y_1 , y_2 , y'_1 und y'_2 annehmen. In diesem Sinne können wir y_1 , y_2 , y'_1 und y'_2 als unabhängige Variablen betrachten. Die Beziehung (G.13) besagt dann, daß $\chi_{y_1} \xi + \chi_{y_2}$ nicht gleich der von den Variablen y_1 , y_2 , y'_1 und y'_2 unabhängigen Konstanten 0 ist.

deren allgemeine Lösung

$$\chi = \chi(y_1/y_2) \quad (\text{G.20})$$

lautet, die in (G.18) eingesetzt

$$f(y_1, y_2) = -\frac{\chi'(y_1/y_2)}{y_2^2} \quad (\text{G.21})$$

ergibt. Nun setzen wir (G.17) und (G.21) in (G.16) ein und integrieren über ξ mit dem Ergebnis

$$\phi = -\frac{1}{\gamma^2 \chi'(y_1/y_2)} \frac{y_2}{y_1 - \xi y_2} + \frac{g(y_1, y_2)}{\gamma^2}. \quad (\text{G.22})$$

Die unbekannte Funktion $g(y_1, y_2)$ ist die Integrations-„Konstante“ bei der unbestimmten ξ -Integration. Wir setzen dieses Ergebnis in die Gleichung (G.14) ein und erhalten nach einigen Umformungen

$$y_2^2 g_{y_1} \xi^2 + \left(y_2^2 g_{y_2} - y_1 y_2 g_{y_1} - y_2 \frac{\chi''}{\chi'^2} \right) \xi + y_1 \frac{\chi''}{\chi'^2} + \frac{y_2}{\chi'} - y_1 y_2 g_{y_2} = 0. \quad (\text{G.23})$$

Die linke Seite ist ein Polynom in ξ und kann daher nur Null werden, wenn jeder Koeffizient der verschiedenen Potenzen von ξ verschwindet. Der Koeffizient vor dem ξ^2 verschwindet genau für

$$g_{y_1} = 0. \quad (\text{G.24})$$

Dann liefert der ξ -Koeffizient die Beziehung

$$g_{y_2} = \frac{\chi''}{y_2 \chi'^2}. \quad (\text{G.25})$$

Für das Absolutglied des ξ -Polynoms ergibt sich dann

$$\frac{y_2}{\chi'(y_1/y_2)} \stackrel{!}{=} 0, \quad (\text{G.26})$$

was offenbar für keine Wahl der Funktion $\chi(y_1/y_2)$ zu erreichen ist. Der erste Fall liefert also keine Darstellung der freien Felder ϕ und χ als Funktionen von y_1 , y_2 , y_1' und y_2' .

2. $\chi_{y_1} \xi + \chi_{y_2}$ und $y_1 - y_2 \xi$ sind als Funktionen von ξ zueinander nicht proportional. Das bedeutet, daß die Vektoren (χ_{y_1}, χ_{y_2}) und $(-y_2, y_1)$ nicht

parallel sind und der Inhalt der von ihnen aufgespannten Fläche nicht verschwindet

$$\frac{C(y_1, y_2)}{\gamma} \equiv \begin{vmatrix} \chi_{y_1} & \chi_{y_2} \\ -y_2 & y_1 \end{vmatrix} = \chi_{y_1} y_1 + \chi_{y_2} y_2 \neq 0. \quad (\text{G.27})$$

In diesem Fall erfolgt die Integration von (G.16) durch Partialbruchzerlegung und führt auf

$$\phi = \frac{1}{\gamma C(y_1, y_2)} \ln \frac{\chi_{y_1} \xi + \chi_{y_2}}{y_1 - y_2 \xi} + \frac{g(y_1, y_2)}{\gamma}. \quad (\text{G.28})$$

Wie im ersten Fall ist hier $g(y_1, y_2)$ die Integrations-„Konstante“ der unbestimmten ξ -Integration. Wir setzen den Ausdruck (G.28) in die Gleichung (G.14) ein und erhalten nach einigen Umformungen

$$\frac{C_{y_1} \xi + C_{y_2}}{C} \ln \frac{\chi_{y_1} \xi + \chi_{y_2}}{y_1 - y_2 \xi} = \frac{\chi_{y_1 y_1} \xi^2 + 2\chi_{y_1 y_2} \xi + \chi_{y_2 y_2}}{\chi_{y_1} \xi + \chi_{y_2}} + C(g_{y_1} \xi + g_{y_2}). \quad (\text{G.29})$$

Die linke Seite der Gleichung ist eine transzendente Funktion² in ξ , während die rechte Seite eine rationale Funktion in ξ ist. Dementsprechend muß der Koeffizient des Logarithmus verschwinden³

$$C_{y_1} \xi + C_{y_2} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad C_{y_1} = C_{y_2} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad C = \text{const.} \quad (\text{G.30})$$

Die rechte Seite der Gleichung (G.29) muß dann auch verschwinden. Nach Multiplikation mit $\chi_{y_1} \xi + \chi_{y_2}$ erhalten wir aus ihr ein quadratisches Polynom in ξ , das genau dann identisch verschwindet, wenn seine Koeffizienten verschwinden

$$\chi_{y_1 y_1} + C g_{y_1} \chi_{y_1} = 0, \quad (\text{G.31})$$

$$2\chi_{y_1 y_2} + C g_{y_2} \chi_{y_1} + C g_{y_1} \chi_{y_2} = 0, \quad (\text{G.32})$$

$$\chi_{y_2 y_2} + C g_{y_2} \chi_{y_2} = 0. \quad (\text{G.33})$$

²Wegen der Bedingung (G.27) ist das Argument des Logarithmus auch wirklich von ξ abhängig.

³Das ist am leichtesten einzusehen, wenn die Gleichung (G.29) mit $\chi_{y_1} \xi + \chi_{y_2}$ multipliziert wird und der Logarithmus in eine Potenzreihe bezüglich ξ entwickelt wird. Dann steht auf der linken Seite der Gleichung eine unendliche Reihe in ξ , auf der rechten Seite hingegen ein Polynom, woraus das Verschwinden des Koeffizienten des Logarithmus folgt. ($\chi_{y_1} \xi + \chi_{y_2}$ ist nicht identisch Null, weil anderenfalls $\chi_{y_1} = \chi_{y_2} = 0$ im Widerspruch zur Bedingung (G.27) folgte.)

Aus der Gleichung (G.27) ergibt sich unter Berücksichtigung von (G.30)

$$\chi(y_1, y_2) = h(y_1/y_2) + \frac{C}{\gamma} \ln y_1 \quad (\text{G.34})$$

mit einer zunächst beliebigen Funktion h . Setzen wir diesen Ausdruck in die Gleichungen (G.31) und (G.33) ein, so können wir die Funktionen g_{y_1} und g_{y_2} durch h' und h'' ausdrücken

$$g_{y_1} = \frac{C - \gamma (y_1/y_2)^2 h''(y_1/y_2)}{y_1 C (C + \gamma (y_1/y_2) h'(y_1/y_2))}, \quad (\text{G.35})$$

$$g_{y_2} = \frac{1}{y_1 C} \left(\frac{h''(y_1/y_2)}{h'(y_1/y_2)} \left(\frac{y_1}{y_2} \right)^2 + 2 \frac{y_1}{y_2} \right). \quad (\text{G.36})$$

Setzen wir diese Ausdrücke in die Gleichung (G.32) ein, erhalten wir nach einigen Umformungen eine Differentialgleichung für h (mit $x = y_1/y_2$):

$$Cxh''(x) + h'(x) (\gamma xh'(x) + 2C) = 0. \quad (\text{G.37})$$

Wir definieren $k(x) = h'(x)$ und gelangen nach Multiplikation mit $k(x)/(Cx^4)$ zu der exakten Differentialgleichung

$$\frac{dk}{x^2 k^2} + \left(\frac{\gamma}{Cx^2} + \frac{2}{x^3 k} \right) dx = U_k dk + U_x dx = dU = 0. \quad (\text{G.38})$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung lautet

$$U = -\frac{\gamma}{Cx} - \frac{1}{x^2 k} = -E = \text{const.} \quad (\text{G.39})$$

Nach k aufgelöst ergibt sich

$$h'(x) = k(x) = \frac{(C/\gamma)}{x((CE/\gamma)x - 1)}. \quad (\text{G.40})$$

Die Integration dieser Gleichung liefert

$$h(x) = \frac{C}{\gamma} \ln \frac{(CE/\gamma)x - 1}{x} + \gamma C \ln F \quad \text{mit} \quad F = \text{const.} \quad (\text{G.41})$$

Dieses Ergebnis in die Gleichung (G.34) eingesetzt, ergibt (hier ist $\alpha = CEF/\gamma$, $\beta = -F$)

$$\chi = \frac{C}{\gamma} \ln (\alpha y_1 + \beta y_2). \quad (\text{G.42})$$

Das ist der erste Teil des Ergebnisses. Als nächstes bestimmen wir g . Dazu setzen wir den Ausdruck (G.42) in die Gleichungen (G.31) und (G.32) ein und erhalten

$$Cg_{y_1} = \frac{\alpha}{\alpha y_1 + \beta y_2}, \quad Cg_{y_2} = \frac{\beta}{\alpha y_1 + \beta y_2}. \quad (\text{G.43})$$

Die Integration dieser Gleichungen liefert

$$g(y_1, y_2) = \frac{1}{C} \ln(\alpha y_1 + \beta y_2) + G, \quad G = \text{const.} \quad (\text{G.44})$$

In die Gleichung (G.28) eingesetzt, erhalten wir die Darstellung von ϕ als Funktion der $y_k(z)$, $y'_k(z)$

$$\phi = \frac{1}{\gamma C} \left(\ln \frac{\alpha y'_1 + \beta y'_2}{y_1 y'_2 - y'_1 y_2} + D \right), \quad (\text{G.45})$$

wobei D mit der Integrationskonstanten G in Gleichung (G.44) zusammenhängt.

Anhang H

Einschränkungen der Parameter der Frei-Feld-Darstellungen

In der Diskussion des Abschnittes 3.7 haben wir gesehen, daß die freien Felder ψ und $\bar{\psi}$ (3.77) so gewählt werden können, daß ihre Komponenten die Form

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{1}{\gamma} \left(\ln \frac{\alpha y'_1 + \beta y'_2}{y_1 y'_2 - y'_1 y_2} + D \right), & \chi &= \frac{1}{\gamma} \ln (\alpha y_1 + \beta y_2), \\ \bar{\phi} &= \frac{1}{\gamma} \left(\ln \frac{\bar{\alpha} \bar{y}'_1 + \bar{\beta} \bar{y}'_2}{\bar{y}_1 \bar{y}'_2 - \bar{y}'_1 \bar{y}_2} + \bar{D} \right), & \bar{\chi} &= \frac{1}{\gamma} \ln (\bar{\alpha} \bar{y}_1 + \bar{\beta} \bar{y}_2).\end{aligned}\quad (\text{H.1})$$

annehmen. Wir wollen nun untersuchen, welche Einschränkungen sich für diese Komponenten aus ihrer Zerlegung in reelle Felder (3.78) und aus den Asymptotenbedingungen (3.96) ergeben.

Die Zerlegung in reelle Felder ist äquivalent zu

$$\phi = \chi^*, \quad \bar{\phi} = \bar{\chi}^*. \quad (\text{H.2})$$

Definieren wir

$$Y(z) \equiv \frac{\alpha y'_1(z) + \beta y'_2(z)}{y_1(z) y'_2(z) - y'_1(z) y_2(z)}, \quad \bar{Y}(\bar{z}) \equiv \frac{\bar{\alpha} \bar{y}'_1(\bar{z}) + \bar{\beta} \bar{y}'_2(\bar{z})}{\bar{y}_1(\bar{z}) \bar{y}'_2(\bar{z}) - \bar{y}'_1(\bar{z}) \bar{y}_2(\bar{z})} \quad (\text{H.3})$$

und verwenden die Gleichungen (3.57), so folgt

$$Y = \frac{\alpha (u y_1 - \bar{y}_2) + \beta (u y_2 + \bar{y}_1)}{y_1 \bar{y}_1 + y_2 \bar{y}_2}, \quad \bar{Y} = \frac{\bar{\alpha} (\bar{u} \bar{y}_1 - y_2) + \bar{\beta} (\bar{u} \bar{y}_2 + y_1)}{y_1 \bar{y}_1 + y_2 \bar{y}_2}, \quad (\text{H.4})$$

$$Y' = \partial_z u \frac{\alpha y_1 + \beta y_2}{y_1 \bar{y}_1 + y_2 \bar{y}_2}, \quad \bar{Y}' = \partial_{\bar{z}} \bar{u} \frac{\bar{\alpha} \bar{y}_1 + \bar{\beta} \bar{y}_2}{y_1 \bar{y}_1 + y_2 \bar{y}_2}, \quad (\text{H.5})$$

$$Y'' = (\partial_z V_+/V_+)Y' + \gamma^2 T Y, \quad \bar{Y}'' = (\partial_{\bar{z}} \bar{V}_+/\bar{V}_+)\bar{Y}' + \gamma^2 \bar{T} \bar{Y}. \quad (\text{H.6})$$

Die Gleichungen (H.6) sind komplex konjugiert zu den Gelfand-Dikii-Gleichungen (3.47). Daher muß $Y(z)$ eine Linearkombination von $y_1^*(z)$ und $y_2^*(z)$ sein und $\bar{Y}(\bar{z})$ eine Linearkombination von $\bar{y}_1^*(\bar{z})$ und $\bar{y}_2^*(\bar{z})$. Das ist verträglich mit (H.2) und (H.1)

$$Y(z) = e^{-D} (\alpha y_1 + \beta y_2)^*, \quad \bar{Y}(\bar{z}) = e^{-\bar{D}} (\bar{\alpha} \bar{y}_1 + \bar{\beta} \bar{y}_2)^*. \quad (\text{H.7})$$

Es geht also nur noch darum, die Linearkoeffizienten $e^{-D} \alpha^*$, $e^{-D} \beta^*$, $e^{-\bar{D}} \bar{\alpha}^*$ und $e^{-\bar{D}} \bar{\beta}^*$ zu untersuchen. Dazu vergleichen wir die Gleichungen (H.7) und deren Ableitungen

$$Y'(z) = e^{-D} (\alpha y_1' + \beta y_2')^*, \quad \bar{Y}'(\bar{z}) = e^{-\bar{D}} (\bar{\alpha} \bar{y}_1' + \bar{\beta} \bar{y}_2')^*. \quad (\text{H.8})$$

im Limes $\sigma \rightarrow -\infty$ mit (H.4) und (H.5). Mit den Randbedingungen für $y_{1,2}$, $\bar{y}_{1,2}$ und deren Ableitungen (3.58), (3.59) erhalten wir folgende Beziehungen zwischen den konstanten Parametern

$$\begin{aligned} \frac{\beta \bar{C}_1 - \alpha \bar{C}_2}{C_1 \bar{C}_1 + C_2 \bar{C}_2} &= e^{-D} (\alpha C_1 + \beta C_2)^*, \\ \frac{\bar{\beta} C_1 - \bar{\alpha} C_2}{C_1 \bar{C}_1 + C_2 \bar{C}_2} &= e^{-\bar{D}} (\bar{\alpha} \bar{C}_1 + \bar{\beta} \bar{C}_2)^*, \\ \frac{\alpha C_1 + \beta C_2}{C_1 \bar{C}_1 + C_2 \bar{C}_2} \partial_z u &= e^{-D} (\beta \bar{C}_1 - \alpha \bar{C}_2)^* \partial_z u, \\ \frac{\bar{\alpha} \bar{C}_1 + \bar{\beta} \bar{C}_2}{C_1 \bar{C}_1 + C_2 \bar{C}_2} \partial_{\bar{z}} \bar{u} &= e^{-\bar{D}} (\bar{\beta} C_1 - \bar{\alpha} C_2)^* \partial_{\bar{z}} \bar{u}. \end{aligned} \quad (\text{H.9})$$

Aus der ersten und dritten dieser Gleichungen finden wir

$$\frac{e^D}{C_1 \bar{C}_1 + C_2 \bar{C}_2} = \frac{(\alpha C_1 + \beta C_2)^*}{\beta \bar{C}_1 - \alpha \bar{C}_2} = \frac{(\beta \bar{C}_1 - \alpha \bar{C}_2)^*}{\alpha C_1 + \beta C_2}. \quad (\text{H.10})$$

Daraus und aus der zweiten und vierten der Gleichungen (H.9) folgt

$$\frac{e^D}{C_1 \bar{C}_1 + C_2 \bar{C}_2} \left(\frac{e^D}{C_1 \bar{C}_1 + C_2 \bar{C}_2} \right)^* = \frac{e^{\bar{D}}}{C_1 \bar{C}_1 + C_2 \bar{C}_2} \left(\frac{e^{\bar{D}}}{C_1 \bar{C}_1 + C_2 \bar{C}_2} \right)^* = 1, \quad (\text{H.11})$$

also gilt

$$\frac{e^D}{C_1\bar{C}_1 + C_2\bar{C}_2} = e^{i\kappa}, \quad \frac{e^{\bar{D}}}{C_1\bar{C}_1 + C_2\bar{C}_2} = e^{-i\bar{\kappa}}, \quad \kappa, \bar{\kappa} \in \mathbb{R}. \quad (\text{H.12})$$

Damit vereinfacht sich (H.9) zu

$$\begin{aligned} (\alpha C_1 + \beta C_2)^* &= e^{i\kappa} (\beta \bar{C}_1 - \alpha \bar{C}_2), \\ (\bar{\alpha} \bar{C}_1 + \bar{\beta} \bar{C}_2)^* &= e^{-i\bar{\kappa}} (\bar{\beta} C_1 - \bar{\alpha} C_2). \end{aligned} \quad (\text{H.13})$$

Bisher haben wir nur die Bedingung (H.2) verwendet. Benutzen wir die Randbedingungen (3.96) für (H.1) so finden wir die weiteren Beziehungen

$$\begin{aligned} \frac{\beta \bar{C}_1 - \alpha \bar{C}_2}{C_1\bar{C}_1 + C_2\bar{C}_2} &= e^{-D}, & \alpha C_1 + \beta C_2 &= 1, \\ \frac{\bar{\beta} C_1 - \bar{\alpha} C_2}{C_1\bar{C}_1 + C_2\bar{C}_2} &= e^{-\bar{D}}, & \bar{\alpha} \bar{C}_1 + \bar{\beta} \bar{C}_2 &= 1. \end{aligned} \quad (\text{H.14})$$

Mit (H.12) wird daraus

$$\begin{aligned} \beta \bar{C}_1 - \alpha \bar{C}_2 &= e^{-i\kappa}, & \alpha C_1 + \beta C_2 &= 1, \\ \bar{\beta} C_1 - \bar{\alpha} C_2 &= e^{i\bar{\kappa}}, & \bar{\alpha} \bar{C}_1 + \bar{\beta} \bar{C}_2 &= 1. \end{aligned} \quad (\text{H.15})$$

Die Gleichungen (H.13) sind damit automatisch erfüllt. Deshalb brauchen wir nur noch (H.15) und (H.12) nach α , β , $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, D und \bar{D} aufzulösen, und wir erhalten (3.98).

Anhang I

Poissonklammern im periodischen Fall

Dieser Anhang stellt Poissonklammern zusammen, die für den periodischen Fall (Kapitel 4) berechnet wurden. Zur Vereinfachung wird eine argumentfreie Schreibweise benutzt. Sie basiert auf der Beobachtung, daß die berechneten Poissonklammern die allgemeine Struktur

$$\{P(\sigma, \tau), Q(\sigma', \tau)\} = \sum_k f_k(\sigma, \tau) O_k(\sigma, \sigma'; \tau) g_k(\sigma', \tau) \quad (\text{I.1})$$

mit bestimmten Funktionen f_k , O_k und g_k haben. Wir können sämtliche Argumente fortlassen, wenn wir vereinbaren, daß die Reihenfolge der Argumente der Funktion O_k identisch mit der Reihenfolge der Argumente in der Poissonklammer ist, die Funktionen f_k also das erste Argument und die Funktionen g_k das zweite Argument der Poissonklammer haben. Wenn wir die Poissonklammern als Integralkerne von Operatoren auffassen, sind die Gleichungen der Kurzschreibweise gerade die entsprechenden Operatorgleichungen, wobei f_k und g_k multiplikative Operatoren darstellen.

Die auftretenden nichtmultiplikativen Operatorkerne O_k sind in der Tabelle I.1 aufgelistet.

In einigen Poissonklammern tauchen Terme auf, in denen über eines oder beide der Argumente der Operatorkerne O_k integriert wird. Dies wird durch ein vorangestelltes (für die Integration über das erste Argument) oder ein nachgestelltes (für die Integration über das zweite Argument) Integralzeichen

symbolisiert

$$\begin{aligned}
\left(f_1 \int f_2 \mathbf{O}\right)(\sigma, \sigma'; \tau) &\equiv f_1(\sigma, \tau) \int_0^{2\pi} f(\sigma'', \tau) O(\sigma'', \sigma'; \tau) d\sigma'' \\
\left(\mathbf{O} f_1 \int f_2\right)(\sigma, \sigma'; \tau) &\equiv \int_0^{2\pi} O(\sigma, \sigma''; \tau) f_1(\sigma'', \tau) d\sigma'' f_2(\sigma', \tau) \\
\left(f_1 \int f_2 \mathbf{O} g_1 \int g_2\right)(\sigma, \sigma'; \tau) &\equiv \\
f_1(\sigma, \tau) \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_2(\sigma'', \tau) O(\sigma'', \sigma'''; \tau) g_1(\sigma''', \tau) d\sigma'' d\sigma''' g_2(\sigma', \tau).
\end{aligned} \tag{I.2}$$

Ein hochgestelltes „T“ steht für Transposition und bedeutet, daß in den Operatorkernen die Argumente vertauscht werden

$$\mathbf{f} = \mathbf{g}^T \Leftrightarrow f(\sigma, \sigma'; \tau) = g(\sigma', \sigma; \tau). \tag{I.3}$$

Aus der Antisymmetrie der Poissonklammer (F.2) ergibt sich in der argumentfreien Schreibweise

$$\{A, B\} = -\{B, A\}^T. \tag{I.4}$$

Bei der Herleitung von Poissonklammern ist es oft erforderlich, nach den Argumenten der Funktionen entsprechend (F.6) abzuleiten. In der argumentfreien Schreibweise notiert ein Strich (') vor der Poissonklammer die Ableitung nach dem ersten Argument, ein Strich (') nach der Poissonklammer die Ableitung nach dem zweiten Argument. Für die in der Tabelle I.1 angegebenen Operatoren ergeben sich beispielsweise die folgende Ableitungen

$$\begin{aligned}
{}'\epsilon &= -\epsilon' = 2\delta, \\
{}'\mathbf{L} &= -\mathbf{L}' = {}'\mathbf{S} = \mathbf{S}' = \mathbf{1}, \\
{}'\mathbf{h} &= -\mathbf{h}' = 2\delta - \frac{1}{\pi}, \\
{}'\mathbf{E} &= 2\delta - (\eta_1 - \eta_2) \mathbf{E}, \\
\mathbf{E}' &= -2\delta + \mathbf{E} (\eta_1 - \eta_2), \\
\mathbf{F}' &= -2\delta + \mathbf{F} (\eta_1 - \eta_2),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{E}^T)' &= (\mathbf{E}')^T = 2\boldsymbol{\delta} - \mathbf{E}^T (\eta_1 - \eta_2), \\
'(\mathbf{E}^T) &= (\mathbf{E}')^T = -2\boldsymbol{\delta} + (\eta_1 - \eta_2) \mathbf{E}^T, \\
'(\mathbf{F}^T) &= (\mathbf{F}')^T = -2\boldsymbol{\delta} + (\eta_1 - \eta_2) \mathbf{F}^T, \\
'\bar{\mathbf{E}} &= 2\boldsymbol{\delta} - (\bar{\eta}_1 - \bar{\eta}_2) \bar{\mathbf{E}}.
\end{aligned} \tag{I.5}$$

Die auf den Seiten 111 ff. aufgelisteten Poissonklammern wurde teilweise mit dem Computeralgebra-Programm MATHEMATICA [62] berechnet.

Operator \mathbf{O}	Operatorkern $O(\sigma, \sigma'; \tau)$
$\mathbf{1}$	1
$\boldsymbol{\delta}$	$\delta_{2\pi}(\sigma - \sigma')$
$\boldsymbol{\epsilon}$	$\epsilon_{2\pi}(\sigma - \sigma')$
\mathbf{L}	$\sigma - \sigma'$
\mathbf{S}	$\sigma + \sigma'$
$\mathbf{h} = \boldsymbol{\epsilon} - \frac{\mathbf{L}}{\pi}$	$h(\sigma - \sigma') = \epsilon_{2\pi}(\sigma - \sigma') - \frac{\sigma - \sigma'}{\pi}$
\mathbf{E}	$\frac{\exp\left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}\epsilon_{2\pi}(\sigma - \sigma')\right)}{\sinh\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}} \frac{y_2(\tau + \sigma)y_1(\tau + \sigma')}{y_1(\tau + \sigma)y_2(\tau + \sigma')}$
$\mathbf{F} = \frac{\eta_2}{\eta_1}\mathbf{E}$	$\frac{\exp\left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}\epsilon_{2\pi}(\sigma - \sigma')\right)}{\sinh\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}} \frac{y_2'(\tau + \sigma)y_1(\tau + \sigma')}{y_1'(\tau + \sigma)y_2(\tau + \sigma')}$
$\bar{\mathbf{E}}$	$\frac{\exp\left(-\frac{\bar{\alpha}_1 - \bar{\alpha}_2}{2}\epsilon_{2\pi}(\sigma - \sigma')\right)}{\sinh\frac{\bar{\alpha}_1 - \bar{\alpha}_2}{2}} \frac{\bar{y}_2(\tau - \sigma)\bar{y}_1(\tau - \sigma')}{\bar{y}_1(\tau - \sigma)\bar{y}_2(\tau - \sigma')}$
$\bar{\mathbf{F}} = \frac{\bar{\eta}_2}{\bar{\eta}_1}\bar{\mathbf{E}}$	$\frac{\exp\left(-\frac{\bar{\alpha}_1 - \bar{\alpha}_2}{2}\epsilon_{2\pi}(\sigma - \sigma')\right)}{\sinh\frac{\bar{\alpha}_1 - \bar{\alpha}_2}{2}} \frac{\bar{y}_2'(\tau - \sigma)\bar{y}_1(\tau - \sigma')}{\bar{y}_1'(\tau - \sigma)\bar{y}_2(\tau - \sigma')}$

Tabelle I.1: Die in der Kurzdarstellung der Poissonklammern auftretenden nichtmultiplikativen Operatoren

Poissonklammern der physikalischen Felder

$$\{\dot{u}, \bar{u}\} = -2\gamma^2(1 + u\bar{u})\boldsymbol{\delta} \quad (\text{I.6})$$

$$\{u, \dot{\bar{u}}\} = 2\gamma^2(1 + u\bar{u})\boldsymbol{\delta} \quad (\text{I.7})$$

$$\{\dot{u}, \dot{\bar{u}}\} = 2\gamma^2(\bar{u}\dot{u} - u\dot{\bar{u}})\boldsymbol{\delta} \quad (\text{I.8})$$

Die übrigen Poissonklammern der u , \bar{u} , \dot{u} und $\dot{\bar{u}}$ verschwinden.

Für $U \equiv \frac{1 + u\bar{u}}{\partial_z \bar{u}}$, $\bar{U} \equiv \frac{1 + u\bar{u}}{\partial_z u}$ gilt

$$\{u, U\} = -\gamma^2 U^2 \boldsymbol{\delta} \quad (\text{I.9})$$

$$\{\bar{u}, \bar{U}\} = -\gamma^2 \bar{U}^2 \boldsymbol{\delta} \quad (\text{I.10})$$

$$\{u, \bar{U}\} = \{\bar{u}, U\} = \{U, U\} = \{\bar{U}, \bar{U}\} = \{U, \bar{U}\} = 0 \quad (\text{I.11})$$

Poissonklammern mit $\eta_{1,2}$ und $\bar{\eta}_{1,2}$

$$\{\eta_1, \eta_2\} = \frac{\gamma^2}{2}(\eta_1 - \eta_2)\mathbf{E}(\eta_1 - \eta_2) - \gamma^2(\eta_1 - \eta_2)\boldsymbol{\delta} \quad (\text{I.12})$$

$$\{\eta_1, \eta_1\} = \{\eta_2, \eta_2\} = \{\eta_1, \bar{\eta}_2\} = \{\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2\} = 0 \quad (\text{I.13})$$

$$\{\eta_1, u\} = \frac{\gamma^2}{2}(\eta_1 - \eta_2)\mathbf{E}\frac{\eta_1 U - u}{\eta_1 - \eta_2}\eta_1 - \gamma^2\eta_1 U \boldsymbol{\delta} = \{\eta_1, U\}\eta_1 \quad (\text{I.14})$$

$$\{\eta_2, u\} = -\frac{\gamma^2}{2}(\eta_1 - \eta_2)\mathbf{E}^T\frac{\eta_2 U - u}{\eta_1 - \eta_2}\eta_2 - \gamma^2\eta_2 U \boldsymbol{\delta} = \{\eta_2, U\}\eta_2 \quad (\text{I.15})$$

$$\{\eta_1, \bar{u}\} = \frac{\gamma^2}{2}(\eta_1 - \eta_2)\mathbf{E}\frac{\eta_1 \bar{u} - \partial_z \bar{u}}{\eta_1 - \eta_2} \quad (\text{I.16})$$

$$\{\eta_2, \bar{u}\} = -\frac{\gamma^2}{2}(\eta_1 - \eta_2)\mathbf{E}^T\frac{\eta_2 \bar{u} - \partial_z \bar{u}}{\eta_1 - \eta_2} \quad (\text{I.17})$$

$$\{\eta_1, U\} = \frac{\gamma^2}{2}(\eta_1 - \eta_2)\mathbf{E}\frac{\eta_1 U - u}{\eta_1 - \eta_2} - \gamma^2 U \boldsymbol{\delta} \quad (\text{I.18})$$

$$\{\eta_2, U\} = -\frac{\gamma^2}{2}(\eta_1 - \eta_2)\mathbf{E}^T\frac{\eta_2 U - u}{\eta_1 - \eta_2} - \gamma^2 U \boldsymbol{\delta} \quad (\text{I.19})$$

$$\{\eta_1, \bar{U}\} = \frac{\gamma^2}{2}(\eta_1 - \eta_2) \mathbf{E} \frac{\eta_1 U - u}{\eta_1 - \eta_2} \frac{\partial_z \bar{u}}{\partial_{\bar{z}} u} = \{\eta_1, U\} \frac{\partial_z \bar{u}}{\partial_{\bar{z}} u} + \gamma^2 U \frac{\partial_z \bar{u}}{\partial_{\bar{z}} u} \boldsymbol{\delta} \quad (\text{I.20})$$

$$\{\eta_2, \bar{U}\} = -\frac{\gamma^2}{2}(\eta_1 - \eta_2) \mathbf{E}^T \frac{\eta_2 U - u}{\eta_1 - \eta_2} \frac{\partial_z \bar{u}}{\partial_{\bar{z}} u} = \{\eta_2, U\} \frac{\partial_z \bar{u}}{\partial_{\bar{z}} u} + \gamma^2 U \frac{\partial_z \bar{u}}{\partial_{\bar{z}} u} \boldsymbol{\delta} \quad (\text{I.21})$$

Poissonklammern mit κ und $\bar{\kappa}$

Die Definitionen von κ und $\bar{\kappa}$ sind in (4.36) gegeben.

$$\{\kappa, \kappa\} = \{\bar{\kappa}, \bar{\kappa}\} = 0 \quad (\text{I.22})$$

$$\{\kappa, \bar{\kappa}\} = \frac{\gamma^2}{2} \left(\frac{u - \eta_2 U}{u - \eta_1 U} \mathbf{E} \frac{U(\eta_1 - \eta_2)}{u - \eta_2 U} - \frac{U(\eta_1 - \eta_2)}{u - \eta_1 U} \mathbf{E} \frac{u - \eta_1 U}{u - \eta_2 U} \right) \quad (\text{I.23})$$

$$\{\kappa, u\} = -\frac{\gamma^2}{2} \frac{U(\eta_1 - \eta_2)}{u - \eta_1 U} \mathbf{E} \frac{u - \eta_1 U}{\eta_1 - \eta_2} \eta_1 = \{\kappa, U\} \eta_1 \quad (\text{I.24})$$

$$\{\kappa, U\} = -\frac{\gamma^2}{2} \frac{U(\eta_1 - \eta_2)}{u - \eta_1 U} \mathbf{E} \frac{u - \eta_1 U}{\eta_1 - \eta_2} \quad (\text{I.25})$$

$$\{u, \bar{\kappa}\} = \frac{\gamma^2}{2} \eta_2 \frac{u - \eta_2 U}{\eta_1 - \eta_2} \mathbf{E} \frac{U(\eta_1 - \eta_2)}{u - \eta_2 U} = \eta_2 \{U, \bar{\kappa}\} \quad (\text{I.26})$$

$$\{U, \bar{\kappa}\} = \frac{\gamma^2}{2} \frac{u - \eta_2 U}{\eta_1 - \eta_2} \mathbf{E} \frac{U(\eta_1 - \eta_2)}{u - \eta_2 U} \quad (\text{I.27})$$

$$\{\kappa, \eta_1\} = \{\eta_2, \bar{\kappa}\} = 0 \quad (\text{I.28})$$

$$\{\kappa, \eta_2\} = -\frac{\gamma^2}{2} \mathbf{E}(\eta_1 - \eta_2) \quad (\text{I.29})$$

$$\{\eta_1, \bar{\kappa}\} = -\frac{\gamma^2}{2}(\eta_1 - \eta_2) \mathbf{E} \quad (\text{I.30})$$

Poissonklammern der $y_{1,2}$ und $\bar{y}_{1,2}$

Der Vollständigkeit halber sind hier die Poissonklammern (4.63) noch einmal aufgeführt:

$$\begin{aligned}
\{\ln y_1, \ln y_1\} &= \{\ln \bar{y}_1, \ln \bar{y}_1\} = 0, \\
\{\ln y_1, \ln y_2\} &= \frac{\gamma^2}{2} \left(\boldsymbol{\epsilon} - \frac{\mathbf{L}}{2\pi} \right) - \frac{\gamma^2}{2} \mathbf{E} + \frac{\gamma^2}{8\pi} \int \mathbf{E}, \\
\{\ln y_1, \ln \bar{y}_1\} &= -\frac{\gamma^2}{4\pi} \mathbf{S}, \\
\{\ln y_1, \ln \bar{y}_2\} &= -\frac{\gamma^2}{8\pi} \int \bar{\mathbf{F}}, \\
\{\ln \bar{y}_1, \ln y_2\} &= -\frac{\gamma^2}{8\pi} \int \mathbf{F}, \\
\{\ln \bar{y}_1, \ln \bar{y}_2\} &= -\frac{\gamma^2}{2} \left(\boldsymbol{\epsilon} - \frac{\mathbf{L}}{2\pi} \right) - \frac{\gamma^2}{2} \bar{\mathbf{E}} + \frac{\gamma^2}{8\pi} \int \bar{\mathbf{E}}, \\
\{\ln y_2, \ln y_2\} &= -\frac{\gamma^2}{8\pi} \int \mathbf{F} + \frac{\gamma^2}{8\pi} \mathbf{F}^T \int, \\
\{\ln y_2, \ln \bar{y}_2\} &= -\frac{\gamma^2}{4\pi} \mathbf{S} - \frac{\gamma^2}{8\pi} \mathbf{E}^T \int + \frac{\gamma^2}{8\pi} \int \bar{\mathbf{E}}, \\
\{\ln \bar{y}_2, \ln \bar{y}_2\} &= -\frac{\gamma^2}{8\pi} \int \bar{\mathbf{F}} + \frac{\gamma^2}{8\pi} \bar{\mathbf{F}}^T \int.
\end{aligned}$$

Anhang J

Symmetrische Poissonklammern

In diesem Anhang definieren wir Funktionen $\tilde{y}_{1,2}(z)$ und $\tilde{\bar{y}}_{1,2}(\bar{z})$, die sich von den Funktionen $y_{1,2}(z)$ und $\bar{y}_{1,2}(\bar{z})$ nur durch eine andere Festlegung der Integrationskonstanten $D_{1,2}$ und $\bar{D}_{1,2}$ in (4.38) unterscheiden und die zu Poissonklammern führen, in denen \tilde{y}_1 und \tilde{y}_2 bzw. $\tilde{\bar{y}}_1$ und $\tilde{\bar{y}}_2$ gleichberechtigt auftreten. Das zeigt einerseits, daß die Poissonklammern der Funktionen $y_{1,2}(z)$ und $\bar{y}_{1,2}(\bar{z})$ tatsächlich von der Definition dieser Integrationskonstanten abhängen, und andererseits, daß das asymmetrische Auftreten der Funktionen $y_{1,2}$ und $\bar{y}_{1,2}$ in den Poissonklammern (4.63) nur durch die auf die Frei-Feld-Darstellung (3.101) bzw. (3.103) abgestimmte Wahl der Integrationskonstanten (4.54) und (4.55) zustande kommt.

Für die Definition der Integrationskonstanten $D_{1,2}$, $\bar{D}_{1,2}$ von $\tilde{y}_{1,2}(z)$ und $\tilde{\bar{y}}_{1,2}(\bar{z})$ gehen wir von den Nullmoden der Funktionen $\kappa(\sigma, \tau)$ und $\bar{\kappa}(\sigma, \tau)$ (4.36) aus, die offenbar keine der Funktionen $y_{1,2}$ und $\bar{y}_{1,2}$ auszeichnen. Wir teilen jetzt die konstanten Teile dieser Nullmoden

$$\begin{aligned}\kappa_Q &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\kappa(\sigma, \tau) - \frac{\tau}{2\pi}(\alpha_1 - \bar{\alpha}_2) - i\sigma m \right] d\sigma, \\ \bar{\kappa}_Q &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\bar{\kappa}(\sigma, \tau) - \frac{\tau}{2\pi}(\bar{\alpha}_1 - \alpha_2) - i\sigma \bar{m} \right] d\sigma\end{aligned}\tag{J.1}$$

auf die Funktionen $\tilde{y}_{1,2}(z)$ und $\tilde{\bar{y}}_{1,2}(\bar{z})$ auf und erhalten

$$D_1 = -\bar{D}_2 = \frac{\kappa_Q}{2}, \quad \bar{D}_1 = -D_2 = \frac{\bar{\kappa}_Q}{2} \quad (\text{J.2})$$

Im Vergleich mit den Festlegungen (4.54) und (4.55) finden wir den folgenden Zusammenhang zwischen den Funktionen $\tilde{y}_{1,2}$, $\tilde{\bar{y}}_{1,2}$, $y_{1,2}$ und $\bar{y}_{1,2}$

$$\begin{aligned} \ln \tilde{y}_1(z) &= \ln y_1(z) + \frac{\kappa_Q}{2} - \frac{\bar{\psi}_Q}{2}, & \ln \tilde{y}_2(z) &= \ln y_2(z) + \frac{\bar{\kappa}_Q}{2} - \frac{\psi_Q}{2}, \\ \ln \tilde{\bar{y}}_1(\bar{z}) &= \ln \bar{y}_1(\bar{z}) + \frac{\bar{\kappa}_Q}{2} - \frac{\psi_Q}{2}, & \ln \tilde{\bar{y}}_2(\bar{z}) &= \ln \bar{y}_2(\bar{z}) + \frac{\kappa_Q}{2} - \frac{\bar{\psi}_Q}{2}. \end{aligned} \quad (\text{J.3})$$

Mit der im Anhang I erklärten argumentfreien Schreibweise lauten die entsprechenden Poissonklammern

$$\begin{aligned} \{\ln \tilde{y}_1, \ln \tilde{y}_2\} &= \frac{\gamma^2}{2} \left(\boldsymbol{\epsilon} - \frac{\mathbf{L}}{2\pi} \right) - \frac{\gamma^2}{2} \mathbf{E} + \\ &\quad + \frac{\gamma^2}{8\pi} \int \mathbf{E} + \frac{\gamma^2}{8\pi} \mathbf{E} \int - \frac{\gamma^2}{32\pi^2} \int (\mathbf{E} - \bar{\mathbf{E}}^T) \int, \\ \{\tilde{y}_1, \tilde{y}_1\} &= \{\tilde{y}_2, \tilde{y}_2\} = 0, \\ \{\ln \tilde{\bar{y}}_2, \ln \tilde{\bar{y}}_1\} &= -\frac{\gamma^2}{2} \left(\boldsymbol{\epsilon} - \frac{\mathbf{L}}{2\pi} \right) + \frac{\gamma^2}{2} \bar{\mathbf{E}}^T - \\ &\quad - \frac{\gamma^2}{8\pi} \int \bar{\mathbf{E}}^T - \frac{\gamma^2}{8\pi} \bar{\mathbf{E}}^T \int - \frac{\gamma^2}{32\pi^2} \int (\mathbf{E} - \bar{\mathbf{E}}^T) \int, \\ \{\tilde{\bar{y}}_1, \tilde{\bar{y}}_1\} &= \{\tilde{\bar{y}}_2, \tilde{\bar{y}}_2\} = 0, \\ \{\ln \tilde{y}_1, \ln \tilde{\bar{y}}_1\} &= -\frac{\gamma^2}{4\pi} \mathbf{S} + \frac{\gamma^2}{8\pi} \mathbf{E} \int - \frac{\gamma^2}{8\pi} \int \bar{\mathbf{E}}^T - \frac{\gamma^2}{32\pi^2} \int (\mathbf{E} - \bar{\mathbf{E}}^T) \int, \\ \{\ln \tilde{\bar{y}}_2, \ln \tilde{y}_2\} &= \frac{\gamma^2}{4\pi} \mathbf{S} + \frac{\gamma^2}{8\pi} \int \mathbf{E} - \frac{\gamma^2}{8\pi} \bar{\mathbf{E}}^T \int - \frac{\gamma^2}{32\pi^2} \int (\mathbf{E} - \bar{\mathbf{E}}^T) \int, \\ \{\tilde{y}_1, \tilde{\bar{y}}_2\} &= \{\tilde{\bar{y}}_1, \tilde{y}_2\} = 0. \end{aligned} \quad (\text{J.4})$$

Literaturverzeichnis

- [1] C. Itzykson and J.-B. Zuber. *Quantum Field Theory*. McGraw-Hill Book Company, New York, 1980.
- [2] S. Weinberg. *The Quantum Theory of Fields*. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [3] C.W. Misner, K.S. Thorne, and J.A. Wheeler. *Gravitation*. W. H. Freeman and Company, San Francisco, 1973.
- [4] S.W. Hawking. *Phys. Rev.*, D13:191, 1976.
- [5] N.D. Birrell and P.C.W. Davies. *Quantum Fields in Curved Space*. Cambridge University Press, Cambridge, 1982.
- [6] G. 't Hooft and M. Veltman. *Annales Poincare Phys. Theor.*, A20:69, 1974.
- [7] M.B. Green, J.H. Schwarz, and E. Witten. *Superstring Theory*. Cambridge University Press, Cambridge, 1987.
- [8] M. Kaku. *Introduction to Superstrings*. Springer-Verlag, New York, 1988.
- [9] E. D'Hoker and D.H. Phong. *Rev. Mod. Phys.*, 60:917, 1988.
- [10] D.H. Friedan. *Ann. Phys.*, 163:318, 1985.
- [11] C.G. Callan, I.R. Klebanov, and M.J. Perry. *Nucl. Phys.*, B278:78, 1986.
- [12] C.G. Callan, D. Friedan, E.J. Martinec, and M.J. Perry. *Nucl. Phys.*, B262:593, 1985.

- [13] A.A. Tseytlin. *Phys. Lett.*, B178:34, 1986.
- [14] I. Bars and D. Nemeschansky. *Nucl. Phys.*, B348:89, 1991.
- [15] E. Witten. *Phys. Rev.*, D44:314, 1991.
- [16] P. Goddard, A. Kent, and D. Olive. *Phys. Lett.*, B152:88, 1985.
- [17] K. Bardakci, E. Rabinovici, and B. Säring. *Nucl. Phys.*, B299:119, 1988.
- [18] D. Karabali, Q-H. Park, H.J. Schnitzer, and Z. Yang. *Phys. Lett.*, B216:307, 1989.
- [19] K. Gawedzki and A. Kupiainen. *Phys. Lett.*, B215:119, 1988.
- [20] K. Gawedzki and A. Kupiainen. *Nucl. Phys.*, B320:625, 1989.
- [21] Q-H. Park. *Phys. Lett.*, B223:175, 1989.
- [22] R. Dijkgraaf, E. Verlinde, and H. Verlinde. *Nucl. Phys.*, B371:269, 1992.
- [23] I. Bars and K. Sfetsos. *Phys. Rev.*, D46:4510, 1992.
- [24] I. Bars and K. Sfetsos. *Phys. Rev.*, D48:844, 1993.
- [25] A.A. Tseytlin. *Nucl.Phys.*, B399:601, 1993.
- [26] A.A. Tseytlin. *Nucl.Phys.*, B411:509, 1994.
- [27] U. Müller and G.Weigt. *Phys. Lett.*, B400:21, 1997.
- [28] K. Bardakci, M. Crescimanno, and E. Rabinovici. *Nucl. Phys.*, B344:344, 1990.
- [29] K. Bardakci, M. Crescimanno, and S.A. Hotes. *Nucl. Phys.*, B349:439, 1991.
- [30] I. Bakas and K. Sfetsos. *Phys. Rev.*, D54:3995, 1996.
- [31] J.-L. Gervais and M. Saveliev. *Phys. Lett.*, B286:271, 1992.
- [32] A. Bilal. *Nucl. Phys.*, B422:258, 1994.
- [33] M.D. Kruskal. *Phys. Rev.*, 119:1743, 1960.

- [34] D. Lynden-Bell and R. Wood. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 136:107, 1967.
- [35] I. Bars and J. Schulze. *Phys. Rev.*, D51:1854–1868, 1995.
- [36] J. Wess and B. Zumino. *Phys. Lett.*, B37:95, 1971.
- [37] S.P. Novikov. *Sov. Math. Dokl.*, 37:3, 1982.
- [38] E. Witten. *Comm. Math. Phys.*, 92:455, 1984.
- [39] H. Sugawara. *Phys. Rev.*, 170:1659, 1968.
- [40] J. Balog, L. Feher, P. Forgacs, L. O’Raifeartaigh, and A. Wipf. *Phys. Lett.*, B227:214, 1989.
- [41] J. Balog, L. Feher, P. Forgacs, L. O’Raifeartaigh, and A. Wipf. *Annals Phys.*, 203:76, 1990.
- [42] T.H. Buscher. *Phys. Lett.*, B201:466, 1988.
- [43] A. Bilal and J.-L. Gervais. *Phys. Lett.*, B206:412, 1988.
- [44] A. Bilal and J.-L. Gervais. *Nucl. Phys.*, B314:646, 1989.
- [45] A. Bilal and J.-L. Gervais. *Nucl. Phys.*, B318:579, 1989.
- [46] J. Liouville. *J. Math. Pures Appl.*, 18:71, 1853.
- [47] I. Bars. *Phys. Rev.*, D53:3308, 1996.
- [48] Y. Satoh. *Nucl. Phys.*, B513:213, 1998.
- [49] J. Distler and P. Nelson. *Nucl. Phys.*, B374:123, 1992.
- [50] M. Wakimoto. *Commun. Math. Phys.*, 104:605, 1986.
- [51] N.Ja. Vilenkin and A.U. Klimyk. *Representation of Lie Groups and Special Functions*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1991.
- [52] K. Becker and M. Becker. *Nucl. Phys.*, B418:206, 1994.
- [53] R.I. Nepomechie. *Phys. Rev.*, D31:3291, 1985.
- [54] H. Dorn. Quantenfeldtheoretische anomalien und funktionalintegration. Skript zur gleichnamigen Vorlesung in Leipzig, 1993.

- [55] J.E. Campbell. *Proc. London Math. Soc.*, 28:381, 1897.
- [56] H.F. Baker. *Proc. London Math. Soc. (1)*, 34:347, 1902.
- [57] H.F. Baker. *Proc. London Math. Soc. (1)*, 35:333, 1903.
- [58] H.F. Baker. *Proc. London Math. Soc. (2)*, 2:293, 1904.
- [59] F. Hausdorff. *Ber. Sächsischen Akad. Wiss. (Math. Phys. Klasse) Leipzig*, 58:19, 1906.
- [60] A.A. Tseytlin. *Phys. Lett.*, B268:175, 1991.
- [61] I. Jack, D.R.T. Jones, and J. Parnell. *Nucl. Phys.*, B393:95, 1993.
- [62] S. Wolfram. *Mathematica, Version 3*. Addison-Wesley, Bonn, 1997.

Danksagung

Sehr dankbar bin ich Dr. G. Weigt für sein Einspringen als Betreuer während der schweren Krankheit von Prof. Dr. E. Wieczorek, für die vielzähligen hilfreichen Diskussionen und für sein sorgfältiges und kritisches Lesen des Manuskripts. Mein Dank richtet sich auch an das DESY-Direktorium, insbesondere an Prof. Dr. P. Söding, für die Gelegenheit, am DESY-Institut für Hochenergiephysik Zeuthen nicht nur diese Arbeit zu verfassen, sondern auch an Konferenzen und einer Frühjahrsschule teilzunehmen, wodurch mein Horizont erheblich erweitert wurde. Weiterhin möchte ich Prof. Dr. D. Lüst für seine Bereitschaft danken, als offizieller Betreuer an der Humboldt-Universität zu fungieren. Mein besonderer Dank gilt auch Prof. Dr. M. Reuter, der mir die Möglichkeit gab, während meiner Zeit an der Johannes-Gutenberg-Universität in Mainz diese Arbeit zu vollenden.

Für wertvolle Literatur- und Sachhinweise zum Thema der Arbeit möchte ich A. Bilal und K. Sfetsos danken.

Dankbar bin ich für die Teilnahme an wissenschaftlichen Diskussionen, die nicht nur Themen dieser Arbeit betrafen, mit C. Aneziris, K. Behrndt, J. Biebel, C.-J. Biebl, J. Blümlein, H. Dorn, D. Fliegner, S. Förste, I. Gaida, F. Jegerlehner, H. Kaiser, D. Lehner, T. Mohaupt, M. Reuter, T. Riemann, S. Riemersma, K. Riebelmann, M.G. Schmidt und C. Schubert.

Für organisatorische Hinweise zur Fertigstellung der Dissertation danke ich D. Hasch, Dr. K. Riebelmann und Dr. C. Schubert.

Für ihre sorgenvolle Anteilnahme am Gelingen dieser Arbeit möchte ich mich bei meinen Eltern und Großeltern bedanken, die mich auch sonst in jeder Hinsicht unterstützt haben.

Für die schöne Zeit bedanke ich mich bei Alessandro, Alpha Oumar, Arndt, Axel, Christian, Delia, Denny, Dietrich, Dima, Falk, Francesco, Heiko, Holger, Gerhard, Hans, Jana, Jochen, Kurt, Lida, Lisa, Moonju, Penka, Sascha, Sabine, Stefan, Stephen, Thomas, Tord und allen anderen.

Selbständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich, die vorliegende Arbeit selbständig ohne fremde Hilfe verfaßt zu haben und nur die angegebene Literatur und Hilfsmittel verwendet zu haben.

Uwe Müller
Berlin, 16. Juni 1998

Tabellarischer Lebenslauf

Name:	Uwe Müller
09/1987 - 10/1992	Studium an der Humboldt-Universität zu Berlin in der Fachrichtung Physik.
10/1991 - 11/1992	Diplomarbeit „Berechnung von Strahlungskorrekturen für eine nichtabelsche Eichfeldtheorie in einem selbstdualen homogenen Hintergrundfeld“ bei Prof. Dr. E. Wieczorek.
03/1993 - 12/1993	Wissenschaftlicher Mitarbeiter am DESY-Institut für Hochenergie Zeuthen bei Prof. Dr. E. Wieczorek zum Thema „Chern-Simons-Theorie und magnetische Strings als nichtabelsche Hintergrundfelder“.
01/1994 - 12/1996	Wissenschaftlicher Mitarbeiter am DESY-Institut für Hochenergie Zeuthen bei Dr. G. Weigt, Promotion an der Humboldt-Universität zu Berlin, Lehrstuhl Prof. Dr. D. Lüst, Institut für Physik.
10/1997 - 09/1999	Wissenschaftlicher Assistent von Prof. Dr. M. Reuter an der Johannes-Gutenberg-Universität Mainz.

Berlin, 16. Juni 1998

Veröffentlichungen (Stand: 16. Juni 1998)

1. U. Müller, *Berechnung von Strahlungskorrekturen für eine nichtabelsche Eichfeldtheorie in einem selbstdualen homogenen Hintergrundfeld*, Diplomarbeit, Humboldt-Universität, Berlin, September 1992.
2. U. Müller, E. Wieczorek, *Radiative Corrections for a Non-Abelian Gauge Theory in a Homogeneous Self-Dual Background*, in: Proceedings of the Second Workshop on “Quantum Field Theory under the Influence of External Conditions”, Leipzig, September 14 – 20, 1992, S. 101 – 112.
3. U. Müller, *A Basis for Invariants in Non-Abelian Gauge Theories*, in: *New Computing Techniques in Physics Research IV* (Proceedings of the Fourth International Workshop on Software Engineering, Artificial Intelligence and Expert Systems for High Energy and Nuclear Physics, Pisa, Italy, April 3 – 8, 1995), World Scientific, 1996, S. 193 – 198, [<http://xxx.lanl.gov/ps/hep-th/9508031>].
4. U. Müller, *Basis Invariants in Non-Abelian Gauge Theories*, Preprint DESY 96-154, <http://xxx.lanl.gov/ps/hep-th/9701124>.
5. U. Müller, G. Weigt, *Exact Solution of the $SL(2,R)/U(1)$ Gauged Wess-Zumino-Novikov-Witten Model*, in: Proceedings of the 30th International Symposium Ahrenschoop on the Theory of Elementary Particles, Buckow, Germany, August 27 – 31, 1996.
6. U. Müller, G. Weigt, *Analytical Solution of the $SL(2,R)/U(1)$ Black Hole Model*, *Phys. Lett.* **B400** (1997) 21, [<http://xxx.lanl.gov/ps/hep-th/9702095>].
7. U. Müller, C. Schubert, A.E.M. van de Ven, *A Closed Formula for the Riemann Normal Coordinate Expansion*, Preprint DESY-97-254, ANL-HEP-PR-97-99, MZ-TH/97-38, Dezember 1997, <http://xxx.lanl.gov/ps/gr-qc/9712092>.
8. U. Müller, G. Weigt, *The Complete Solution of the Classical $SL(2,R)/U(1)$ Gauged WZNW Field Theory*, Preprint DESY-98-062, MZ-TH/98-21, Mai 1998, <http://xxx.lanl.gov/ps/hep-th/9805215>.